মাধ্যমিক গণিত

৯ম শ্রেণী

ডক্টর মৃদুল সেন
কৃষ্ণপদ গাঙ্গুলী

Recommended by the West Bengal Board of Secondary Education as a Text book of Arithmetic & Algebra for Class IX.
Vide Notification No. TB/74/AA/36. Dated 24.11.75

মাধ্যমিক গণিত

[পাটীগণিত ও বীজগণিত]

[নবম শ্রেণী]

ডক্টর মৃদুল সেন
গণিত বিভাগ, কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়।
ও
শ্রীকৃষ্ণপদ গাঙ্গুলী, এম. এস.-সি., বি. এড.
প্রধান শিক্ষক, মধ্যমগ্রাম উচ্চ বিদ্যালয় ;
ভূতপূর্ব গণিত শিক্ষক, দমদম মতিলাল বিদ্যায়তন।

নিউ বুক এজেন্সী
১৮/বি, শ্যামাচরণ দে ষ্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০০৭৩

সাহায্যে উপপাদ্যগুলির সার্থকতা প্রমাণ করা হয়েছে। এই অধ্যায়ের আলেচনাগুলি আমাদের গ্রন্থটির একটি বিশেষ অধ্যায়। অন্যান্য অধ্যায়গুলিতেও সংজ্ঞা ও উদাহরণ দানের ক্ষেত্রে আমরা খুবই সতর্ক হবার চেষ্টা করেছি।

অনুশীলনীগুলি যোজনার ক্ষেত্রে বিভিন্ন বোর্ড, বিশ্ববিদ্যালয় ও সাম্প্রতিককালে অনুষ্ঠিত প্রতিযোগিতামূলক পরীক্ষাগুলিতে প্রদত্ত প্রশ্নাবলী বিবেচনা করা হ'য়েছে।

অতিক্রুত মুদ্রণের জন্য বইটিতে ত্রুটি থাকা অসম্ভব নয়। সুধী শিক্ষকসমাজ ও প্রিয় ছাত্র-ছাত্রীরা ঐ সকল ভুলভ্রান্তির প্রতি আমাদের দৃষ্টি আকর্ষণ করলে আমরা বিশেষ কৃতজ্ঞ ও বাধিত হ'ব। পুস্তকটির উন্নতিকল্পে সকল ধরনের পরামর্শই সাদরে গ্রহণ করতে আমরা প্রস্তুত।

বইখানি প্রণয়নের ক্ষেত্রে অধ্যাপক রণেন বসু, শ্রীযুক্ত শক্তিময় বন্দ্যোপাধ্যায় ও শ্রীযুক্ত হেমচন্দ্র বিশ্বাসের মূল্যবান পরামর্শ আমাদের বিশেষ সহায়ক হ'য়েছে। আমাদের স্নেহাস্পদ ছাত্র শ্রীমান অরবিন্দ চক্রবর্তী, সঞ্জয় পই ও অজয় দাশগুপ্তের সাহায্য না পেলে বইটির সময়মত প্রকাশে বিঘ্ন ঘটত।

ইতি—

জুলাই, ১৯৭৪

মৃদুল সেন
কৃষ্ণপদ গাঙ্গুলী

বিষয় সূচী

বীজগণিত

পাটীগণিত

পরিশিষ্ট

প্রকাশক :
শ্রীহেমচন্দ্র বিশ্বাস
১৮/বি, শ্যামাচরণ দে ষ্ট্রীট
কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রথম প্রকাশ	:	ডিসেম্বর, ১৯৭৩
দ্বিতীয় মুদ্রণ	:	ফেব্রুয়ারী, ১৯৭৪
তৃতীয় মুদ্রণ	:	ডিসেম্বর, ১৯৭৪
সংশোধিত সংস্করণ	:	জুন, ১৯৭৫
চতুর্থ মুদ্রণ	:	জানুয়ারী, ১৯৭৬
পঞ্চম মুদ্রণ	:	ফেব্রুয়ারী, ১৯৭৭

মূল্য : তিন টাকা নব্বই পয়সা।

মুদ্রাকর :
শ্রীপঞ্চানন পাল
লক্ষ্মীশ্রী প্রেস
১৫/১, ঈশ্বর মিল লেন
কলিকাতা-৭০০০০৬

পূর্বকথা

খ্রীষ্টজন্মের দু' হাজার বছর আগে কাল্পনিক প্রশ্নের সমাধান করতে গিয়ে গণিত শাস্ত্রের একটি শাখা ভারতবর্ষে আবিষ্কৃত হ'য়েছিল। খ্রীষ্টীয় ষষ্ঠ শতকে গণিতের উক্ত অংশকে 'কুট্টক গণিত' বলা হয়েছে। ব্রহ্মগুপ্তের টীকাকার পৃথূদক স্বামীই এই শাখাকে সর্বপ্রথম 'বীজগণিত' আখ্যা দেন। খ্রীষ্টজন্মের পরবর্তীকালে ভারতে সূর্যসিদ্ধান্তকার, আর্যভট্ট, ব্রহ্মগুপ্ত, মহাবীর, শ্রীধর, পদ্মনাভ প্রভৃতি পণ্ডিতেরা এই শাস্ত্রকে সমৃদ্ধ করেন। ভারত থেকে গৃহীত এই বীজগণিত আরবদের কাছ থেকে ইউরোপে প্রচলিত হয়। F. Victe, A. Girard, Descartes প্রভৃতি মনীষিবৃন্দ এই শাস্ত্রকে সমৃদ্ধতর করেছেন। পরবর্তী কালে গুরুত্বের সঙ্গে বীজগণিত নিয়মিত চর্চা ও গবেষণা হ'য়েছে বিশ্বের বিভিন্ন দেশে।

বীজগণিত ও পাটীগণিত উভয়ই সংখ্যাগণিতের দু'টি শাখা। কিন্তু পাটীগণিত অপেক্ষা বীজগণিতের সূত্রাদি ও প্রক্রিয়া অধিকতর ব্যাপক। এই কারণেই বিশ্ববিখ্যাত বিজ্ঞানী নিউটন বীজগণিতকে 'নিখিল গণিত' আখ্যা দিয়েছেন। বস্তুতপক্ষে বীজগণিত শিক্ষার গুরুত্বই এইখানে—বীজগণিতের সূত্র ও কার্যাদি সম্পর্কে সঠিক ধারণা না হ'লে গণিত শিক্ষা অসম্পূর্ণ থেকে যায়।

এই উদ্দেশ্যেই আমরা পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ প্রকাশিত পাঠ্যসূচী অনুসারে 'মাধ্যমিক গণিত' রচনায় প্রয়াসী হ'য়েছি। সূত্রগুলির আলোচনায়, উদাহরণের উপস্থাপনা ও অনুশীলনী নির্বাচনে আমরা যথাসাধ্য সচেষ্ট হয়েছি যাতে এগুলি অনুসরণকালে ছাত্রদের কাছে বীজগণিত আকর্ষণীয় হ'য়ে ওঠে এবং তাদের ধারণাগুলি স্পষ্ট হয়।

পর্যদের নির্দেশ অনুসারে পাটীগণিতের অংশ বীজগণিতের সাহায্যে সমাধান করা হ'য়েছে। বিষয়টি যাতে ছাত্রদের সহজবোধ্য হয় তার জন্য আমরা বিশেষ চেষ্টা করেছি।

৭ম ও ৮ম শ্রেণীতে ছাত্র-ছাত্রীদের শিক্ষণীয় বিষয়গুলি আমরা সংক্ষেপে পূর্বে আলোচনা ক'রে নিয়েছি যাতে এই গ্রন্থের অনুশীলনকারী ছাত্র-ছাত্রীরা পূর্ব-অধীত বিষয়গুলি পুনরায় চর্চা ক'রে নিতে পারে। উৎপাদক কাহাকে বলে? 'উৎপাদকে বিশ্লেষণ' বলতে কি বোঝায়? এ বিষয়ে স্পষ্ট বক্তব্য রাখা হয়েছে। গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলি বিশেষভাবে আলোচনা ক'রে উপযুক্ত উদাহরণের

SYLLABUS IN ALGEBRA & ARITHMETIC

CLASS IX

ALGEBRA (30 marks)

1. Revision of Previous work.
2. Harder problems leading to equations—simple and simultaneous.
3. Graphs of simple equations—Application.

ARITHMETIC (15 marks)

Ratio—Proportion and Percentage (Problems may be solved Algebraically).

এই পুস্তকে ব্যবহৃত সাঙ্কেতিক চিহ্ন ঃ

চিহ্ন	অর্থ
$=$	সমান
$\neq$	অসমান
$<$	ক্ষুদ্রতর
$>$	বৃহত্তর
$\leqslant$	ক্ষুদ্রতর অথবা সমান
$\geqslant$	বৃহত্তর অথবা সমান
$\therefore$	অতএব
$\because$	যেহেতু
$\{a, b, c \cdots\}$	a, b, c পদগুলির দ্বারা গঠিত সেট্
$\{ n \}$	একটি সেট্, যাহার একমাত্র পদ n
$a \in A$	a, A সেটের একটি পদ
$A \subset B$	A, B সেটের সাবসেট্
$A \subsetneq B$	A, B সেটের যথার্থ সাবসেট্
$A \cup B$	A ও B-এর সংযোগ সেট্
$A \cap B$	A ও B-এর ছেদ সেট্
(x, y)	লেখচিত্রের একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক
$\sqrt[n]{a}\left(=a^{\frac{1}{n}}\right)$	a সংখ্যাটির n-তম ধনাত্মক মূল
$\sqrt{a}$	a সংখ্যাটির ধনাত্মক বর্গমূল
$n\%$	শতকরা n

মাধ্যমিক গণিত

নবম শ্রেণী

উপক্রমণিকা

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ প্রকাশিত গণিতের পাঠ্যসূচী যাহাতে ছাত্র-ছাত্রীদের কাছে আকর্ষণীয় হইয়া উঠে এ জন্যে গণিতের প্রারম্ভে 'সেট্', 'সংখ্যা', 'সমাধান সেট্' প্রভৃতি সম্পর্কে সামান্য আলোচনা করা হইল।

'একদল ছাত্র', 'এক ঝাঁক পাখি', 'এক পাল ভেড়া', 'এক পাঁজা ইট' প্রভৃতি বাক্যাংশ তোমরা প্রায়ই ব্যবহার করিয়া থাক। ঐ সকল বাক্যাংশে 'দল', 'ঝাঁক', 'পাল', 'পাঁজা' প্রভৃতি শব্দগুলির প্রত্যেকটি শব্দ দ্বারা কোন নির্দিষ্ট বস্তুর সংগ্রহকে (collection) বুঝান হইয়াছে। আবার বস্তুর সংগ্রহকে বুঝাইতে 'সেট্' শব্দটিও ব্যবহার করা হয়। যেমন, 'এক সেট্ ড্রেস', 'এক সেট্ বই', 'এক সেট্ ডিস' ইত্যাদি।

সাধারণতঃ বস্তুর (objects) সংগ্রহকে **সেট্** (set) বলিয়া ধরা হয়। যে সকল বস্তুকে লইয়া সেটটি গঠিত হয় তাহাদের প্রত্যেকটিকে ঐ সেটের **পদ** (element) বলে। তোমাদের শ্রেণীর ছাত্রগণ একটি সেট্ গঠন করিয়াছে। শ্রেণীর প্রত্যেকটি ছাত্রই ঐ সেটের এক একটি পদ।

মনে কর, 1, 2, 3, 4,…প্রভৃতি স্বাভাবিক সংখ্যাগুলিকে (Natural numbers) লইয়া একটি সেট্ গঠন করা হইল। এক্ষেত্রে 1, 2, 3, 4,…এর প্রত্যেকটি সংখ্যাই উক্ত সেটের একটি পদ হইবে। এই সেটটিকে স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্ বলে।

সাধারণতঃ কোন সেটের নামকরণে বড় হরপের ইংরাজী অক্ষর ব্যবহার করা হয়, এবং সেটের পদগুলিকে বন্ধনীর মধ্যে রাখা হয়। যেমন, স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে '$N=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$' লেখা হইয়া থাকে। এখন 2 সংখ্যাটি N-সেটের একটি পদ কিন্তু -2 সংখ্যাটি উক্ত সেটের পদ নয়। 2 সংখ্যাটিকে N-সেটের একটি পদ বুঝাইতে '$2 \in N$' লেখা হয়। '$2 \in N$' বিবৃতিকে '2, N-সেটের পদ' বা '2, N-সেটের অন্তর্ভুক্ত' পড়া হয়। অপর পক্ষে (-2) সংখ্যাটি N-সেটের পদ নয় বুঝাইতে '$-2 \notin N$' লেখা হইয়া থাকে।

সসীম সেট্ (Finite Set): যদি কোন সেটের পদ সংখ্যা সীমিত হয় তবে সেটটিকে **সসীম সেট্** (Finite Set) বলে। $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{a, c\}$ প্রভৃতি সেটগুলি সসীম সেট্।

অসীম সেট্ (Infinite Set) : যদি কোন সেটের পদ সংখ্যা সীমিত না হয় তবে সেটটিকে **অসীম সেট্** (Infinite Set) বলে। যথা, N={ সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলি } এবং W={0, 1, 2, 3, 4, ...} সেট্ দুইটি প্রত্যেকেই অসীম সেট্।

সমান সেট্ (Equal Set) : দুইটি সেটের একই পদ থাকিলে সেট্ দুইটিকে **সমান সেট্** (Equal Set) বলে। P={2, 5, 7} এবং Q={5, 7, 2} সেট্ দুইটি সমান সেট্। 'A এবং B সেট্ দুইটি সমান' এই বিবৃতিটিকে 'A=B' লেখা হয়।

সাবসেট্ (Subset), **যথার্থ সাবসেট্** (Proper Subset) : যদি B এবং D এরূপ দুইটি সেট্ হয় যে B সেটের প্রত্যেকটি পদ D সেটের পদ হয় তবে B সেটটিকে D সেটের **সাবসেট্** (Subset) বলে।

আবার যদি B সেটটি D সেটের সাবসেট্ হয়, কিন্তু B সেটটি D সেটের সমান না হয় তবে B সেটটিকে D সেটের **যথার্থ সাবসেট্** (Proper Subset) বলা হয়।

'$B \subset D$' '$B \subsetneq D$', এই সাঙ্কেতিক বাক্যগুলির দ্বারা যথাক্রমে 'B সেটটি D সেটটির সাবসেট্', 'B সেটটি D সেটটির যথার্থ সাবসেট্'—এই কথাগুলি প্রকাশ করা হয়।

উদা. 1. B={2, 4, 6}, D={ সকল জোড় সংখ্যা }।

এই উদাহরণের B সেটটি D সেটের সাবসেট্।

আবার লক্ষ্য কর যে, B এবং D সমান সেট্ নয়।

অতএব B, D-এর যথার্থ সাবসেট্।

উদা. 2. C={ সব সমবাহু ত্রিভুজ }, D={ সব সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ }।

এই উদাহরণে $C \subset D$, কিন্তু C এবং D সেট্ দুইটি সমান নয়।

উদা. 3. F={3, 5, 7}, G={2 অপেক্ষা বড়, কিন্তু 8 অপেক্ষা ছোট বিজোড় সংখ্যাগুলি }.

এই উদাহরণে $F \subset G$ এবং F=G.

অতএব, এখানে F, G-এর যথার্থ সাবসেট্ নয়।

দুইটি সেটের সংযোগ (Union of two Sets) :

যদি কোন সেটের যে-কোন পদ A অথবা B অথবা A ও B উভয় সেটের পদ হয় তবে সেটটিকে A এবং B সেটের **সংযোগ** (Union) বলে। A এবং B সেটের সংযোগকে $A \cup B$ লেখা হইয়া থাকে। যদি A={6, 7, 9, 12} এবং B={3, 5, 6, 7, 8} হয় তবে $A \cup B$={3, 5, 6, 7, 8, 9, 12} হইবে।

দুইটি সেটের ছেদ (Intersection of two Sets) : যদি A এবং B সেটের সাধারণ পদগুলিকে লইয়া একটি সেট্ গঠন করা হয় তবে সেটটিকে A এবং B সেটের **ছেদ** (Intersection) বলে। এই সেটটিকে '$A \cap B$' লেখা হয়। যদি $A = \{6, 7, 5, 9, 12\}$ এবং $B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ হয় তবে $A \cap B = \{5, 7\}$ হইবে।

শূন্যসেট্ (Empty Set) : কোন সেটে যদি একটিও পদ না থাকে তবে সেটটিকে **শূন্যসেট্** (Empty Set বা Null Set) বলে। শূন্য সেট্ বুঝাইতে ϕ চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। যদি $P = \{2, 3, 4\}$ এবং $Q = \{5, 6, 7\}$ হয় তবে $P \cap Q$ সেটটি শূন্য সেট্ হইবে।

বিচ্ছেদ সেট্ (Disjoint Set) : যদি দুইটি সেটের কোন সাধারণ পদ না থাকে তবে ঐ সেট্ দুইটিকে **বিচ্ছেদ সেট্** (Disjoint Set) বলা হয়। $A = \{3, 5, 7, 11\}$ এবং $B = \{2, 4, 8\}$ সেট্ দুইটিতে কোন সাধারণ পদ নাই। অতএব, A এবং B সেট্ দুইটি বিচ্ছেদ সেট্। লক্ষ্য কর যে, $A \cap B = \phi$

অন্তর সেট্ (Difference Set) : যদি A এবং B দুইটি সেট্ হয় তবে '$A \sim B$' সেটটিকে A এবং B সেট্ দুইটির **অন্তর** (Difference) বলা হইবে যদি $A \sim B$ সেটের পদগুলি A সেটের সেই সকল পদ যাহারা B সেটের পদ নয়।

মনে কর, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ এবং $B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

তবে $A \sim B = \{1, 2, 4, 6\}$.

পূরক (Complement) : যদি P এবং Q সেট্ দুইটি এরূপ সম্বন্ধ যুক্ত হয় যে $Q \subset P$ তবে $P \sim Q$ সেটটিকে P সেটের সাপেক্ষে Q সেটের পূরক (complement) বলে।

$A \times B$ সেট্ : মনে কর, A এবং B সেট্ দুইটির কোনটিই শূন্য সেট্ নয়। যদি a এবং b পদ দুইটি যথাক্রমে A এবং B সেটের পদ হয় তবে (a, b) পদটিকে 'a ও b পদের নির্দিষ্ট ক্রম যুগল' (ordered pair) বলে। এই প্রকারের সমস্ত নির্দিষ্ট ক্রম যুগল দ্বারা যে সেটটি গঠন করা হয় তাহাকে $A \times B$ সেট্ বলে। অর্থাৎ, $A \times B = \{(a, b)$, যেখানে $a \in A, b \in B\}$.

যেমন, $A = \{2, 3\}$ এবং $B = \{5, 6, 7\}$ হইলে

$A \times B = \{(2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7)\}$ হইবে। আবার

$B \times A = \{(5, 2), (5, 3), (6, 2), (6, 3), (7, 2), (7, 3)\}$; লক্ষ্য কর $A \times B$ এবং $B \times A$ সেট্ দুইটি সমান সেট্ নয়।

বক্তব্য (Statement) : যদি কোন বাক্য সত্য অথবা মিথ্যা হয় কিন্তু যুগপৎ সত্য ও মিথ্যা না হয় তবে গণিতে বাক্যটিকে **বক্তব্য** (Statement) বলে। নিম্নে কয়েকটি বাক্য সম্পর্কে আলোচনা করা হইল।

(i) পৃথিবী সূর্যের চারিপার্শ্বে আবর্তন করে।
(ii) 2 একটি পূর্ণ সংখ্যা।
(iii) -3, কি একটি ঋণাত্মক সংখ্যা ?
(iv) $5+9=14$. (v $x+3=5$. (vi) $2+3=8$.
(vii) আমি যাহা লিখিতেছি তাহা মিথ্যা।

উপরের উদাহরণগুলির প্রত্যেকটিই বাক্য। এই বাক্যগুলির মধ্যে (i), (ii), (iv), (vi) বাক্য চারিটি বক্তব্য এবং অন্যগুলি বক্তব্য নয়। এক্ষেত্রে (i), (ii) এবং (iv) বাক্য তিনটি সত্য এবং (vi) বাক্যটি মিথ্যা। আবার (vii) বাক্যটি যুগপৎ সত্য ও মিথ্যা হইতে পারে।

মুক্ত বাক্য (Open Sentence) **:** '$x+3=5$', '$x^2=4$', '$(y+8)$, 12 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর', '$(y-5)$ ধনাত্মক' প্রভৃতি বাক্যগুলির ক্ষেত্রে x এবং y-এর মান জানা না থাকিলে ঐ বাক্যগুলি সত্য কি মিথ্যা তাহা বলা সম্ভব নয়। '$x+3=5$' বাক্যে x-এর পরিবর্তে যে-কোন পূর্ণসংখ্যা বসাইলে প্রতিক্ষেত্রে বাক্যটি বক্তব্যে পরিণত হইবে। যেমন, x-এর পরিবর্তে 2 বসাইলে বাক্যটি সত্য হইবে ; আবার x-এর পরিবর্তে 3 বসাইলে বাক্যটি মিথ্যা হইবে। অপর বাক্য দুইটি সম্পর্কেও একথা বলা যায়। এই প্রকারের বাক্যগুলিকে **মুক্ত বাক্য** (Open Sentence) বলা হয়। '$x+3=5$', '$(y+8)$ সংখ্যাটি 12-এর সমান' প্রভৃতি মুক্ত বাক্যে ব্যবহৃত 'x' এবং 'y'-কে চলক (Variable) বলে।

চলক (Variable) **:** চলক বলিতে মুক্ত বাক্যে ব্যবহৃত সেই সকল চিহ্নগুলিকে বুঝাইবে যাহাদের পরিবর্তে গ্রহণযোগ্য সেটগুলি হইতে পদ বসাইলে মুক্ত বাক্যটি বক্তব্যে পরিণত হয়।

ক্ষেত্র (Domain) **:** কোন মুক্ত বাক্যের চলকের সাপেক্ষে গ্রহণযোগ্য সেটটিকে উক্ত চলকের **ক্ষেত্র** (Domain) বলে

যেমন, $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ সেটটি $x+1=3$ মুক্ত বাক্যের চলক x-এর একটি গ্রহণযোগ্য সেট্। অতএব এক্ষেত্রে U-সেটটি x-এর একটি ক্ষেত্র। কিন্তু সমগ্র ত্রিভুজের সেটটি উক্ত মুক্ত বাক্যের x-এর ক্ষেত্র নয়।

সমাধান সেট্ (Solution Set) **:** মনে কর, কেবলমাত্র x চলকবিশিষ্ট P-একটি মুক্ত বাক্য এবং U একটি সেট্ যাহা x-চলকের ক্ষেত্র। এখন U-সেটের যে সকল

পদকে x-এর পরিবর্তে বসাইলে 'P' সত্য বক্তব্যে পরিণত হয় সেই সকল পদগুলিকে লইয়া গঠিত সেটটিকে U-সেটের পরিপ্রেক্ষিতে P মুক্ত বাক্যটির **সমাধান সেট্** (Solution Set) বলে।

$x+1=3$ মুক্ত বাক্যে x চলক এবং $U=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ সেটটিকে x-এর একটি ক্ষেত্র ধরা হইল। এখন মুক্ত বাক্যটিতে x-এর পরিবর্তে U-সেটের প্রত্যেকটি পদ বসান হইল। দেখা যাইবে যে, x-এর পরিবর্তে কেবলমাত্র 2 সংখ্যাটি বসাইলেই মুক্ত বাক্যটি সত্য বক্তব্যে পরিণত হইয়াছে। অতএব {2} সেটটি U-ক্ষেত্রের পরিপ্রেক্ষিতে $x+1=3$ মুক্ত বাক্যটির সমাধান সেট্। কোন মুক্ত বাক্যে একাধিক চলক থাকিলেও উহার সমাধান সেটের সংজ্ঞা দেওয়া যায়। নিম্নের উদাহরণটি লক্ষ্য কর।

$x+y=3$ একটি বাক্য। বাক্যটি সত্য কি মিথ্যা তাহা কিছুই বলা সম্ভব নয়। অতএব, ইহা একটি মুক্ত বাক্য। মনে কর, I=পূর্ণসংখ্যার সেট্; অতএব $I\times I$ $=\{(n, m)$, যেখানে n, m পূর্ণসংখ্যা $\}$। এখন x-এর পরিবর্তে 5 এবং y-এর পরিবর্তে (-2) বসাইলে উক্ত মুক্ত বাক্যটি সত্য বক্তব্যে পরিণত হইবে। এক্ষেত্রে $(5, -2)$-কে উক্ত মুক্ত বাক্যের একটি সমাধান বলে। অনুরূপে দেখান যায় যে; $I\times I$ সেটের $(6, -3), (1, 2), (2, 1)\cdots$প্রভৃতি পদগুলি $x+y=3$ মুক্ত বাক্যের এক একটি সমাধান। এই সমাধানগুলির দ্বারা গঠিত সেটটিকে $x+y=3$-এর সমাধান সেট্ বলে।

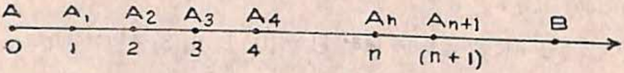
মনে কর, কেবলমাত্র x এবং y চলকবিশিষ্ট P একটি মুক্ত বাক্য এবং U একটি সেট্ যাহা x এবং y উভয়েরই ক্ষেত্র। (a, b) যদি $U\times U$-এর এরূপ একটি পদ হয় যে উক্ত মুক্ত বাক্যে x-এর পরিবর্তে a এবং y-এর পরিবর্তে b বসাইলে মুক্ত বাক্যটি সত্য বক্তব্যে পরিণত হয় তবে উক্ত পদটিকে P মুক্ত বাক্যের একটি সমাধান বলে। এক্ষেত্রে $U\times U$-এর যে সমস্ত পদ P বাক্যের সমাধান হইবে তাহাদের দ্বারা গঠিত সেটটিকে U সেটের পরিপ্রেক্ষিতে মুক্তবাক্যটির সমাধান সেট্ বলে।

সংখ্যা (Number): 1, 2, 3, 4,$\cdots$প্রভৃতি স্বাভাবিক সংখ্যাগুলিকে লইয়া যে সেট্ গঠন করা হয় তাহাকে স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্ বলে। এই সেটটিকে $N=\{1, 2, 3, 4\cdots\}$ লেখা যাইতে পারে। যদি p সংখ্যাটি N-সেটের একটি পদ হয় তবে $p+1)$ সংখ্যাটিও ঐ সেটের একটি পদ হইবে।

সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যা ও শূন্যকে লইয়া গঠিত সেটটিকে W দ্বারা সূচিত করা হইল।

অতএব, $W=\{0, 1, 2, 3, 4,\cdots\}$; লক্ষ্য কর যে, N-সেটটি W-সেটের একটি যথার্থ সাবসেট্।

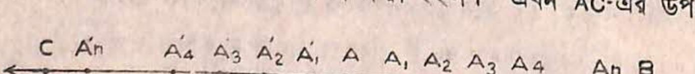
W-সেটের লেখচিত্র : $\overrightarrow{AB}$ অঙ্কন করা হইল। $\overrightarrow{AB}$-এর প্রান্তবিন্দু A-কে চিহ্নিত করিয়া উহাকে 0 (শূন্য) ধরা হইল।



অতঃপর $\overrightarrow{AB}$-এর উপর $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots A_n, A_{n+1}, \cdots$ বিন্দুগুলিকে এরূপে স্থাপন করা হইল যাহাতে $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \cdots = A_nA_{n+1} = \cdots$ হয়। এখন $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots, A_n, A_{n+1}, \cdots$ প্রভৃতি বিন্দুগুলির সাপেক্ষে যথাক্রমে $1, 2, 3, 4, \cdots, n, n+1, \cdots$ সংখ্যাগুলিকে বসাইলে যে চিত্রটি পাওয়া গেল তাহাই W-সেটের লেখচিত্র। এখানে $A, A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots, A_n, A_{n+1}, \cdots$ প্রভৃতি বিন্দুর সাপেক্ষে যে সংখ্যাটি আছে তাহাকে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (co ordinate) বলে।

W-সেটের যে-কোন দুইটি পদকে যোগ করিলে যে পদটি পাওয়া যাইবে তাহা W-সেটের একটি পদ হইবে। এখন $x+3=5$ একটি মুক্ত বাক্য। এই বাক্যে W-সেটের পদগুলিকে বসাইলে দেখা যাইবে যে, x-এর পরিবর্তে 2 বসাইলে মুক্ত বাক্যটি সত্য বক্তব্যে পরিণত হয়। অপর একটি মুক্ত বাক্যে $2+x=0$ লওয়া হইল। এক্ষেত্রে x-এর পরিবর্তে W-সেটের পদগুলিকে বসাইলে দেখা যাইবে যে, W-সেট্ হইতে এরূপ কোন পদই নির্বাচন করা সম্ভব নয় যাহাতে $2+x=0$ মুক্ত বাক্যটি সত্য বক্তব্যে পরিণত হইবে। এখন নূতন ধরনের সংখ্যার কথা চিন্তা করা যাক্।

$\overrightarrow{AB}$ অঙ্কন করিয়া পূর্বপ্রণালীতে W সেটের লেখচিত্রটি অঙ্কন করা হইল। অতঃপর $\overrightarrow{AB}$-এর বিপরীত রশ্মি $\overrightarrow{AC}$ অঙ্কন করা হইল। এখন $\overrightarrow{AC}$-এর উপর A'_1,



$A'_2, A'_3, A'_4 \cdots A'_n \cdots$ প্রভৃতি বিন্দুগুলিকে এরূপে স্থাপন করা হইল যেন $AA_1 = AA'_1$, $AA_2 = AA'_2$, $AA_3 = AA'_3$, $AA_4 = AA'_4, \cdots, AA_n = AA'_n, \cdots$ হয়। $\overrightarrow{AB}$-এর উপর অবস্থিত A_n বিন্দুটির সহিত যুক্ত সংখ্যাটি n ; এখন $\overrightarrow{AC}$-এর উপর অবস্থিত A'_n বিন্দুটির সহিত যুক্ত সংখ্যাটিকে n-এর বিপরীত সংখ্যা অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা n বলা হইবে। এই সংখ্যাটিকে $(-n)$ দ্বারা সূচিত করা হইল। $(-n)$ এরূপ একটি সংখ্যা যাহা $n+x=0$ মুক্ত বাক্যকে সত্য বক্তব্যে পরিণত করে ; অর্থাৎ $n+(-n)=0$ হইবে।

অতএব, ঋণাত্মক সংখ্যা 1, ঋণাত্মক সংখ্যা 2, ঋণাত্মক সংখ্যা 3,.......-কে যথাক্রমে $-1, -2, -3,\cdots\cdots$দ্বারা সূচিত করা হইবে।

আবার $-1, -2, -3,\cdots$প্রভৃতি সংখ্যা যথাক্রমে, A'_1, A'_2, A'_3,…-এর স্থানাঙ্ক হইবে।

$\{0, 1, 2, 3,\cdots\}$ এবং $\{-1, -2, -3,\cdots\}$ সেট্ দুইটির সংযোগ সেটটিকে পূর্ণ সংখ্যার সেট্ বলে। যদি **পূর্ণ সংখ্যার** সেটটিকে I ধরা হয় তবে, $I=\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,\cdots\}$; $\overleftrightarrow{BC}$ চিত্রটি I সেটের লেখচিত্র।

I-সেটের যে-কোন দুইটি পদকে গুণ করিলে যে সংখ্যা পাওয়া যাইবে তাহা I-সেটের একটি পদ হইবে। এখন $3x=6$ মুক্ত বাক্যটির কথায় আসা যাক্। এই বাক্যে x-এর পরিবর্তে I সেটের পদগুলিকে বসাইলে দেখা যাইবে যে, x-এর পরিবর্তে 2 বসাইলে মুক্ত বাক্যটি সত্য বক্তব্যে পরিণত হয়। এই মুক্ত বাক্যটিকে বক্তব্যে পরিণত করার পরিপ্রেক্ষিতে x-এর মান নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে সাধারণতঃ ভাগ প্রক্রিয়া বলা হয়। এক্ষেত্রে $6\div3=2$ লেখা হয়। অপর একটি মুক্ত বাক্য $2x=3$ লওয়া হইল। এই মুক্ত বাক্যটির পরিপ্রেক্ষিতে এমন কোন পূর্ণ সংখ্যা n পাওয়া যাইবে না যাহাতে $2\div3=n$ হয়। অতএব, দেখা যাইতেছে যে ভাগ ক্রিয়ার জন্য নূতন ধরনের সংখ্যার প্রয়োজন।

এখন a এবং b দুইটি পূর্ণ সংখ্যা এবং $b\neq0$ হইলে $ax=b$ মুক্ত বাক্যের পরিপ্রেক্ষিতে নূতন সংখ্যাটিকে $\frac{a}{b}$ দ্বারা লেখা হইল। অতএব, $a\div b=\frac{a}{b}$। যদি a এবং b এরূপ দুইটি পূর্ণ সংখ্যা হয় যাহাতে $a\div b$, N-সেটের একটি পদ তবে উক্ত পদটিই $\frac{a}{b}$। যেমন, $\frac{6}{3}=2$.

এখন a, b উভয়েই পূর্ণসংখ্যা এবং $b\neq0$ হইলে $\frac{a}{b}$ আকারের সমস্ত সংখ্যাগুলিকে **মূলদ সংখ্যা** (Rational number) বলা হয়। এই মূলদ সংখ্যাগুলিকে লইয়া যে সেট্ গঠন করা হয় তাহাকে মূলদ সংখ্যার সেট্ বলে। মনে কর, মূলদ সংখ্যার সেটটি Q.

Q সেটটির এরূপ একটি পদ $\frac{n}{m}$ ধরা হইল যাহার n এবং m প্রত্যেক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এখন I সেটের লেখচিত্রের $\overline{AA_1}$-কে m সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করা হইল। ঐ সমান অংশগুলির যে-কোন একটি অংশের সমান দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া A বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যটিকে $\overrightarrow{AB}$ বরাবর পরপর n সংখ্যক বার বসাইয়া শেষ যে বিন্দুটি পাওয়া গেল তাহাকে চিহ্নিত করা হইল। মনে কর, বিন্দুটি P ; P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $\frac{n}{m}$ ধরা হইল। এখন A বিন্দু হইতে $\overrightarrow{AB}$-এর উপর যতদূরে P বিন্দুটি আছে A বিন্দু হইতে ঠিক তত দূরে $\overrightarrow{AC}$-এর উপর অপর একটি বিন্দুকে চিহ্নিত করা হইল।

মনে কর, বিন্দুটি P_1 ; এই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $-\frac{n}{m}$ ধরা হইল। যদি m এবং n সংখ্যাদ্বয়ের একটি ধনাত্মক এবং একটি ঋণাত্মক হয় তবে $\frac{n}{m}$ এর অবস্থান P_1 বিন্দুতে ধরা হইবে। আবার m এবং n উভয়েই ঋণাত্মক হইলে $\frac{n}{m}$-এর অবস্থান P বিন্দুতে ধরা হইবে। অতএব, দেখা যাইতেছে যে, Q সেটের প্রত্যেকটি পদের পরিপ্রেক্ষিতে $\overleftrightarrow{BC}$-এর উপর এক একটি বিন্দু পাওয়া যাইবে।

দেখান যায় যে $\overleftrightarrow{BC}$-এর উপর অনেকবিন্দু আছে যাহাদের সহিত কোন মূলদসংখ্যা যুক্ত হয় নাই। এই বিন্দুগুলির পরিপ্রেক্ষিতে আবার নূতন সংখ্যার প্রয়োজন। এই বিন্দুগুলির সহিত নূতন যে সংখ্যাগুলি যুক্ত করা হয় তাহাদের অমূলদ সংখ্যা বলে। অতএব, অমূলদ সংখ্যা এরূপ সংখ্যা যাহাদের $\frac{p}{q}$(p, q পূর্ণসংখ্যা $p \neq 0$) আকারে প্রকাশ করা যায় না। সমস্ত মূলদ সংখ্যা এবং অমূলদ সংখ্যাগুলিকে লইয়া যে সেট্ গঠন করা হয় তাহাকে **বাস্তব সংখ্যার সেট্** (Set of Real numbers) বলে।

উপরের আলোচনা হইতে দেখা যাইতেছে $\overleftrightarrow{BC}$-এর প্রত্যেকটি বিন্দুর সহিত একটি করিয়া বাস্তব সংখ্যা এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার সহিত $\overleftrightarrow{BC}$-এর উপর একটি করিয়া বিন্দুকে যুক্ত করা যায়।

আবার লক্ষ্য কর স্বাভাবিক সংখ্যার সেটটি পূর্ণসংখ্যার সেটটির যথার্থ সাবসেট্, পূর্ণসংখ্যার সেটটি মূলদ সংখ্যার সেটটির যথার্থ সাবসেট্, মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার সেট্ দুইটি পরস্পরের বিচ্ছেদ সেট্, কিন্তু উভয়েই বাস্তব সংখ্যার সেটটির যথার্থ সাবসেট্।

সমীকরণ (Equation) : $2x+1=x-3$, $x^2=4$, $(x-1)(x+2)=0$ প্রভৃতি সমতাজ্ঞাপক মুক্ত বাক্যগুলিকে x-চলকের সমীকরণ (Equation) বলা হয়। কিন্তু '$(x+8)$ সংখ্যাটি ধনাত্মক'—এই মুক্ত বাক্যটি সমীকরণ নয়। সমতাজ্ঞাপক মুক্তবাক্যের সমাধান সেটের প্রত্যেকটি পদকে সমীকরণটির বীজ (Root) বলে। সমীকরণের চলকটিকে সমীকরণের অজ্ঞাতরাশি বলা হয়।

সহ-সমীকরণের সমাধান সেট্ :

এক্ষেত্রে $x+y=4$ এবং $x-y=4$ সহসমীকরণ দুইটির সমাধান সেট্ বলিতে কি বুঝান হয় তাহা আলোচনা করা যাক।

মনে কর, $W=\{0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ সেটটি x এবং y চলকের ক্ষেত্র।

এখন $A=\{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0), (0, 4)\cdots\}$ সেটটি $x+y=4$-এর সমাধান সেট্। আবার $B=\{(4, 0), (5, 1), (6, 2), (7, 3)\cdots\cdots\}$সেটটি $x-y=4$ এর সমাধান সেট্।

এখন $A \cap B=\{(4, 0)\}$ সেটটির পদের সাপেক্ষে $x+y=4$ এবং $x-y=4$ মুক্ত বাক্য দুইটি যুগপৎ সত্য বক্তব্যে পরিণত হয়। অর্থাৎ $A \cap B=\{(4, 0)\}$ সেটটি W সেটের পরিপ্রেক্ষিতে প্রদত্ত সহ-সমীকরণ দুইটির সমাধান সেট্।

প্রথম অধ্যায়

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা (Revision of Previous Work)

সাধারণ চারি নিয়ম

1. পূর্ববর্তী শ্রেণীসমূহে বহুপদ রাশির যোগ, বিয়োগ, গুণন ও ভাগ—এই চার নিয়ম সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হইয়াছে। নিম্নে কতকগুলি উদাহরণের সাহায্যে ঐ সকল বিষয়ের পুনরালোচনা করা হইল।

2. **বহুপদ রাশিসমূহের যোগ :** বহুপদ রাশিগুলির যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে সদৃশ পদগুলিকে একই স্তম্ভে রাখিয়া, এবং অসদৃশ পদগুলিকে ভিন্ন ভিন্ন স্তম্ভে রাখিয়া প্রত্যেক স্তম্ভের পদগুলির যোগফল পাশাপাশি রাখিলেই বহুপদ রাশিগুলির যোগফল পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. $\frac{1}{3}a-\frac{2}{5}b-\frac{1}{4}c$, $\frac{6}{7}a+\frac{3}{5}c-\frac{4}{5}b$, $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}c$ এবং $\frac{2}{3}b-\frac{1}{7}a$-এর যোগফল নির্ণয় কর।

উঃ সদৃশ পদগুলিকে একই স্তম্ভে রাখিয়া প্রদত্ত রাশিগুলিকে সাজান হইল।

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3}a-\frac{2}{5}b-\frac{1}{4}c \\ \frac{6}{7}a-\frac{4}{5}b+\frac{3}{5}c \\ -\frac{1}{2}a \qquad\quad -\frac{1}{3}c \\ -\frac{1}{7}a+\frac{2}{3}b \\ \hline \frac{23}{42}a-\frac{8}{15}b+\frac{1}{60}c \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল
$=\frac{23}{42}a-\frac{8}{15}b+\frac{1}{60}c.$

প্রথম স্তম্ভের যোগফল

$=(\frac{1}{3}a+\frac{6}{7}a-\frac{1}{2}a-\frac{1}{7}a)$
$=(\frac{1}{3}+\frac{6}{7}-\frac{1}{2}-\frac{1}{7})a=\frac{23}{42}a.$

দ্বিতীয় স্তম্ভের যোগফল

$=(-\frac{2}{5}b-\frac{4}{5}b+\frac{2}{3}b)$
$=(-\frac{2}{5}-\frac{4}{5}+\frac{2}{3})b=-\frac{8}{15}b$

তৃতীয় স্তম্ভের যোগফল

$=(-\frac{1}{4}c+\frac{3}{5}c-\frac{1}{3}c)$
$=(-\frac{1}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{3})c=\frac{1}{60}c$

3. **বহুপদ রাশিসমূহের বিয়োগ :** একটি বহুপদ রাশি হইতে অপর একটি বহুপদ রাশিকে বিয়োগ করিতে হইলে বিয়োজনের নীচে বিয়োজ্যকে এইরূপে স্থাপন করিতে হইবে যে উহাদের সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে এবং অসদৃশ পদগুলি ভিন্ন ভিন্ন স্তম্ভে থাকে। অতঃপর বিয়োজ্যের প্রতিটি পদের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া উহাকে বিয়োজনের সহিত যোগ করিলে প্রদত্ত রাশিমালা দুইটির বিয়োগফল পাওয়া যাইবে। আবার বিয়োজ্যের পদগুলির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া উহাদের বিয়োজনের অব্যবহিত পরে লিখিয়া যে রাশিমালা পাওয়া যায়, তাহাকে সরল করিলেও দুইটির বিয়োগফল পাওয়া যায়।

উদা. 2. $\frac{3x-2y}{5}-\frac{2x+3z}{8}+\frac{5z-6y}{9}$ হইতে $\frac{x+3y}{4}+\frac{4z-3x}{5}-\frac{2z-y}{6}$ বিয়োগ কর।

উঃ নির্ণেয় বিয়োগফল

$$=\left(\frac{3x-2y}{5}-\frac{2x+3z}{8}+\frac{5z-6y}{9}\right)-\left(\frac{x+3y}{4}+\frac{4z-3x}{5}-\frac{2z-y}{6}\right)$$

$$=\frac{3x-2y}{5}-\frac{2x+3z}{8}+\frac{5z-6y}{9}-\frac{x+3y}{4}-\frac{4z-3x}{5}+\frac{2z-y}{6}$$

$$=\left(\frac{3x-2y}{5}-\frac{4z-3x}{5}\right)-\left(\frac{2x+3z}{8}+\frac{x+3y}{4}\right)+\left(\frac{5z-6y}{9}+\frac{2z-y}{6}\right)$$

$$=\frac{3x-2y-4z+3x}{5}-\frac{2x+3z+2x+6y}{8}+\frac{10z-12y+6z-3y}{18}$$

$$=\frac{6x-2y-4z}{5}-\frac{4x+3z+6y}{8}+\frac{16z-15y}{18}$$

$$=\frac{72(6x-2y-4z)-45(4x+3z+6y)+20(16z-15y)}{360}$$

$$=\frac{432x-144y-288z-180x-135z-270y+320z-300y}{360}$$

$$=\frac{252x-714y-103z}{360}=\frac{252}{360}x-\frac{714}{360}y-\frac{103}{360}z$$

$$=\frac{7}{10}x-1\frac{56}{60}y-\frac{103}{360}z.$$

প্রশ্নমালা 1

যোগ কর :

1. $ax+by-2cz,\ 2bx-ay+cz,\ cx+2ay+bz.$

2. $1{\cdot}5x+3{\cdot}2y-2{\cdot}8z,\ 0{\cdot}6x-1{\cdot}9y+3{\cdot}5z,\ 1{\cdot}9x-1{\cdot}3y-1{\cdot}7z.$

3. $\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{2}z,\ -\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}z+\frac{4}{9}y,\ \frac{1}{6}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{4}z.$

4. $\frac{ax+by}{ab}-\frac{bz-2cy}{bc}+\frac{az-3cx}{ac},\ \frac{bx-3cz}{bc}+\frac{2by+5az}{ab}-\frac{2cx-3ay}{ca}$

5. $\frac{2x-1}{5}+\frac{3y-4z}{8}\ \ \frac{3x+2y}{5}+\frac{6y-z}{6},\ \frac{y-x+4}{5}-\frac{x-y}{2},$

বিয়োগ কর :

6. $10x^4-17x^3-13x^2+12$ হইতে $7x^4-11x^2+8x+3.$

7. $11a^3x+12ax^2+9ax+13$ হইতে $-9ax^2+10ax+13x-7.$

8. $\frac{2x+3y}{6}-\frac{3x+4z}{12}+\frac{5z-2y}{10}$ হইতে $\frac{4x-5z}{20}+\frac{3y+8z}{24}-\frac{2z-7y}{14}$

9. $\frac{1}{4}(a-b+c),\ \frac{2}{3}(2a+3b-c),\ \frac{2}{5}(3a-b+2c)$ রাশি তিনটি যোগ কর। $a=5,\ b=-2,\ c=1$ হইলে যোগফলের মান কত হইবে ?

4. গুণন :

ঘাত, সূচক এবং নিধান :

কোন রাশিকে উক্ত রাশিদ্বারা এক বা একাধিক বার গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায় তাহাকে উক্ত রাশির ঘাত বলে। যে-কোন রাশিকেই ঐ রাশির প্রথম ঘাত বলে।

যথা, x-কে x-এর 'প্রথম ঘাত', $(x\times x)$-কে x-এর 'দ্বিতীয় ঘাত' বা বর্গ, $(x\times x\times x)$-কে x-এর 'তৃতীয় ঘাত' বা ঘন বলে।

x-এর দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম…ঘাতকে যথাক্রমে x^2, x^3, x^4, x^5…দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

এক্ষেত্রে, 2, 3, 4, 5,… …প্রভৃতি সংখ্যাকে যথাক্রমে x-এর দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম…ঘাতের সূচক এবং x-কে নিধান বলা হয়।

5. **সূচক নিয়ম :** a^5 বলিতে $a\times a\times a\times a\times a$-কে বুঝায়। এখন, $(a^2).(a^3)=(a\times a).(a\times a\times a)=a^5=a^{2+3}$ হইবে। অর্থাৎ যখন একই

নিধানের বিভিন্ন ঘাতকে গুণ করা যায় তখন গুণফলটি ঐ নিধানযুক্ত হইবে এবং উহার সূচকটি উক্ত ঘাতগুলির সূচকের যোগফল হইবে।

(A) যদি m এবং n অখণ্ড ধনরাশি হয়, তবে দেখাও যে, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

প্রমাণ : $a^m = a\,a.a.\cdots m$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

$a^n = a\,a.a.\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

অতএব, $a^m \times a^n = (a.a.a.\cdots\cdots m$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$\times (a\,a.a.\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$= a\,a.a.\cdots\cdots(m+n)$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$= a^{m+n}$.

(B) $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots p_n$ প্রত্যেকে অখণ্ড ধনরাশি হইলে,

$$a^{p_1} \,.\, a^{p_2} \,.\, a^{p_3} \cdots\cdots a^{p_n} = a^{p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n}$$

(C) যদি m এবং n অখণ্ড ধনরাশি হয়, তবে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$

প্রমাণ : $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

$= a^{m+m+m+\cdots n}$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$= a^{mn}$.

দ্রষ্টব্য : কেবলমাত্র একই নিধানযুক্ত রাশির গুণনের ক্ষেত্রে উহাদের ঘাতগুলির সূচকের বীজগণিতীয় সমষ্টি হইবে।

যথা, $2x^2y^3 \times 3x^5y = 6x^{2+5}y^{3+1} = 6x^7y^4$.

6. বহুপদ রাশির গুণন :

যদি গুণ্য এবং গুণক উভয়েই বহুপদ হয়, তবে গুণ্যের প্রত্যেক পদদ্বারা গুণকের প্রত্যেক পদকে গুণ করিয়া যে ফলগুলি পাওয়া যায় তাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টিই নির্ণেয় গুণফল হইবে।

যথা, $(a+b)(x+y) = ax+bx+ay+by$

উদা. 1. (x^2+xy+y^2)-কে (x^2-xy+y^2) দ্বারা গুণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গুণফল

$= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$= x^2(x^2-xy+y^2) + xy(x^2-xy+y^2) + y^2(x^2-xy+y^2)$

$= x^4 - x^3y + x^2y^2 + x^3y - x^2y^2 + xy^3 + x^2y^2 - xy^3 + y^4$

$= x^4 + x^2y^2 + y^4$

উদা. 2. $1-2x+4x^2-8x^3+16x^4$ এবং $1+2x-4x^2+8x^3+16x^4$-এর গুণফলে x^2-এর সহগ নির্ণয় কর।

উঃ গুণ্য $=1-2x+4x^2-8x^3+16x^4$

গুণক $=1+2x-4x^2+8x^3+16x^4$

প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গুণফল না বাহির করিয়া নিম্নলিখিত উপায়ে রাশি দুইটির গুণফলে x^2-এর সহগ নির্ণয় করা যায়। এক্ষেত্রে গুণ্য এবং গুণকের পদগুলিকে এইরূপে গুণ করিতে হইবে যে, গুণফলগুলি কেবলমাত্র x^2 যুক্ত পদ হইবে।

গুণকের 1 দ্বারা গুণ্যের $(+4x^2)$-কে গুণ করিয়া প্রাপ্ত ফল $=4x^2$

" $(+2x)$ " " $(-2x)$ " " " " " $=-4x^2$

" $(-4x^2)$ " " 1 " " " " " $=-4x^2$

∴ রাশি দুইটির গুণফলে x^2-যুক্ত পদগুলির সমষ্টি

$=(4x^2-4x^2-4x^2)=-4x^2$

∴ নির্ণেয় সহগ $=-4$.

7. বহুপদ রাশির ভাগ ঃ

উদা. 3. p এর মান কত হইলে $3x^3+4x^2+(p-2)x-2$ রাশির $x+2$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে?

উঃ

$$\begin{array}{r|l|l}
x+2 & 3x^3+4x^2+(p-2)x-2 & 3x^2-2x+p+2 \\
 & \underline{3x^3+6x^2} & \\
 & -2x^2+px-2x-2 & \\
 & \underline{-2x^2 \qquad -4x} & \\
 & px+2x-2 & \\
 & \underline{px \qquad +2p} & \\
 & 2x-2p-2 & \\
 & \underline{2x \qquad +4} & \\
 & -2p-6 &
\end{array}$$

এক্ষেত্রে ভাগশেষ শূন্য হইবে, অতএব $-2p-6=0$

বা, $-2p=6$ ∴ $p=-3$.

প্রশ্নমালা 2

গুণফল নির্ণয় কর ঃ

1. $(3x-2y+5)(2x-3y)$
2. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
3. $\left(a+\frac{b}{2}+1\right)\left(a+\frac{b}{2}\right)$
4. $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x-2\right)\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x+1\right)$

5. $(b-c)(b+c)(b^2+c^2)(b^4+c^4)$

ভাগ কর ঃ

6. $15c^4-c^3x-14c^2x^2+7cx^3-3x^4$-কে $5c^2-2cx+x^2$ দ্বারা।

7. $a+a^5+a^6$-কে a^2+a+1 দ্বারা।

8. $a^3+8b^3-c^3+6abc$-কে $a+2b-c$ দ্বারা।

9. $x^6+\frac{p^6}{27}$-কে $x^2+px+\frac{p^2}{3}$ দ্বারা।

10. $2x^3-3x-5x^2+1$ এবং $7x^2-3x-4$-এর গুণফলে x^3 যুক্ত পদের সহগ নির্ণয় কর।

11. $9x^4+7x^3+4x^2+25x+3p$ রাশিটি $(x+2)$ দ্বারা বিভাজ্য হইলে p-এর মান নির্ণয় কর।

12. $2x^3+5x^2-mx+4$ রাশিটি x^2+2x-1 দ্বারা বিভাজ্য হইলে x-এর মান কত ?

***প্রমাণে ভুল কোথায় বল।**

মনে কর $a=2, b=3, c=8$ এবং $d=12$.

এখন $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12}=\frac{c}{d}$.

$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.........(i)

$\therefore\ \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ [উভয় পক্ষে 1 যোগ করিয়া]

$\therefore\ \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.........(ii)

আবার, $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ [(i)-এর উভয় পক্ষ হইতে 1 বিয়োগ করিয়া]

$\therefore\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.........(iii)

$\therefore\ \frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d}$ [(iii) হইতে]

$\therefore$ (ii) এবং (iii) হইতে, $\frac{a+b}{b}\times\frac{b}{a-b}=\frac{c+d}{d}\times\frac{d}{c-d}$

বা, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

$\therefore$ $(a+b)(c-d)=(c+d)(a-b)$ [বজ্রগুণন করিয়া]

$\therefore$ $ac-ad+bc-bd=ac-bc+ad-bd$

$\therefore$ $1(bc-ad)=-1(bc-ad)\cdots\cdots$(iv)

$\therefore$ $1=-1$ [উভয় পক্ষকে $(bc-ad)$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

মন্তব্য : $y.x=z.x$ হইলে সর্বদা $y=z$ হইবে কি? উপরের উদাহরণটিতে $y=1, x=bc-ad$ এবং $z=-1$ যদি ধরা হয় তাহা হইলে (iv) নং হইতে লেখা যায় যে $yx=zx.$

এখন $y.x=z.x$ হইতে $y=z$ অর্থাৎ এই ক্ষেত্রে $1=-1$ লেখাতে একটি অবাস্তব বক্তব্যের সম্মুখীন হইতে হইয়াছে। অতএব $y.x=z.x$ হইলে সর্বদা $y=z$ হইবে একথা বলা যায় না।

যদি $y.x=z.x$ হয় এবং $x=0$ না হয় তবেই $y=z$ হইবে। বিভিন্ন অঙ্ক কষিবার সময় এই বক্তব্যটি মনে রাখিবে।

দ্বিতীয় অধ্যায়

সহজ সূত্রাবলী ও উহাদের প্রয়োগ

(Easy formulae and their applications)

8. পূর্ববর্তী শ্রেণীতে কয়েকটি বীজগণিতীয় সূত্রের আলোচনা করা হইয়াছে। এক্ষেত্রে ঐ সকল সূত্র-সম্বন্ধীয় অন্যান্য জ্ঞাতব্য বিষয়সমূহের বিস্তারিত আলোচনা করা হইল।

সূত্র 1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

সূত্র 2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

উদা. 1. সূত্রের সাহায্যে রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :

(i) $2x^2+5y$ (ii) $3x-6y-7z$ (iii) $p-q-r-2$.

উঃ (i) $(2x^2+5y)^2=(2x^2)^2+2(2x^2)(5y)+(5y)^2$

$=4x^4+20x^2y+25y^2$.

(ii) $(3x-6y-7z)^2=\{(3x-6y)-7z\}^2$

$=(3x-6y)^2-2(3x-6y).7z+(7z)^2$

$=9x^2-36xy+36y^2-42xz+84yz+49z^2$.

$=9x^2+36y^2+49z^2-36xy+84yz-42zx$.

(iii) $(p-q-r-2)^2=\{(p-q)-(r+2)\}^2$

$=(p-q)^2-2(p-q)(r+2)+(r+2)^2$

$=p^2-2pq+q^2-2(pr+2p-qr-2q)+r^2+4r+4$

$=p^2-2pq+q^2-2pr-4p+2qr+4q+r^2+4r+4$

$=p^2+q^2+r^2-2pq-2pr+2qr-4p+4q+4r+4$

উদা. 2. বর্গ কর :

(i) 999 (ii) 3·05.

উঃ (i) $(999)^2=(1000-1)^2$

$=(1000)^2-2(1000).1+(1)^2$

$=1000000-2000+1=998001$.

(ii) $(3{\cdot}05)^2=(3+{\cdot}05)^2$

$$=(3)^2+2.3.({\cdot}05)+({\cdot}05)^2$$
$$=9+0{\cdot}3+{\cdot}0025=9{\cdot}3025.$$

উদা. 3. সরল কর :—

$$(x-y+z)^2-2(x-y+z)(x+y-z)+(x+y-z)^2$$

উঃ মনে কর, $(x-y+z)=a$ এবং $(x+y-z)=b$.

$\therefore\ a-b=x-y+z-x-y+z=2z-2y$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=a^2-2ab+b^2$

$=(a-b)^2=(2z-2y)^2$ [মান বসাইয়া]

$=4z^2-8zy+4y^2$

$=4(z^2-2zy+y^2)$

উদা. 4. যদি $x=\dfrac{2mp}{a^2+m^2}$ এবং $y=\dfrac{2mq}{a^2-m^2}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{p^2}{x^2}-\frac{q^2}{y^2}=a^2.$$

উঃ $x=\dfrac{2mp}{a^2+m^2}$ $\quad\therefore\quad \dfrac{x}{p}=\dfrac{2mp}{p(a^2+m^2)}=\dfrac{2m}{a^2+m^2}$

$$\therefore\quad \frac{p}{x}=\frac{a^2+m^2}{2m}\quad\ldots\ldots(1)$$

$y=\dfrac{2mq}{a^2-m^2}$ $\quad\therefore\quad \dfrac{y}{q}=\dfrac{2mq}{q(a^2-m^2)}=\dfrac{2m}{a^2-m^2}$

$$\therefore\quad \frac{q}{y}=\frac{a^2-m}{2m}\quad\ldots\ldots(2)$$

$\dfrac{p^2}{x^2}-\dfrac{q^2}{y^2}=\dfrac{(a^2+m^2)^2}{(2m)^2}-\dfrac{(a^2-m^2)^2}{(2m)^2}$ [(1) এবং (2) হইতে পাওয়া যায়]

$$=\frac{(a^2+m^2)^2}{4m^2}-\frac{(a^2-m^2)^2}{4m^2}$$

$$=\frac{1}{4m^2}\ [\ a^4+2a^2m^2+m^4-a^4+2a^2m^2-m^4\ ]$$

$$=\frac{1}{4m^2}\ [\ 4a^2m^2\ ]=a^2.$$

***প্রমাণে ভুল কোথায় বল।**

মনে কর, $a=5$. $b=4$ এবং $c=3$

এখন $(5-4)^2=(3-4)^2$

সুতরাং $(a-b)^2=(c-b)^2$

$\therefore\ a-b=c-b.$

$\therefore\ a-b+b=c-b+b$ [উভয় পক্ষে b যোগ করিয়া]

$\therefore\ a=c$

অর্থাৎ, $5=3$. [মান বসাইয়া]

দ্রষ্টব্য : $a=b$ হইলে ইহা সত্য যে $a^2=b^2$ হইবে। কিন্তু $a^2=b^2$ হইলে, সর্বদা $a=b$ নাও হইতে পারে

9. $(a+b)^2$ এবং $(a-b)^2$ সম্বন্ধীয় কয়েকটি জ্ঞাতব্য বিষয় :

সূত্র : $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab.$

উদা. 5. $x+\frac{1}{x}=p$ হইলে প্রমাণ কর যে, $x^4+\frac{1}{x^4}=p^4-4p^2+2.$

উঃ $x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2x^2\frac{1}{x^2}$

$$=\left[\left\{(x)+\left(\frac{1}{x}\right)\right\}^2-2x.\frac{1}{x}\right]^2-2$$

$$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}^2-2$$

$$=(p^2-2)^2-2=p^4-4p^2+2.$$

সূত্র : $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab.$

উদা 6. $p-\frac{1}{p}=2\sqrt{5}$ হইলে, $p^2+\frac{1}{p^2}$ এবং $p^4+\frac{1}{p^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

উঃ $p^2+\frac{1}{p^2}=\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+2p.\frac{1}{p}=(2\sqrt{5})^2+2=22.$

আবার, $p^4+\frac{1}{p^4}=\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)^2-2p^2\cdot\frac{1}{p^2}$

$=(22)^2-2\left[\because p^2+\frac{1}{p^2}=22\right]$

$=482.$

সূত্র : $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2.$

উদা. 7. $a+\frac{1}{a}=x$ এবং $a-\frac{1}{a}=y$ হইলে x^2+y^2-এর মান নির্ণয় কর।

উঃ $x+y=a+\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}=2a.$

$x-y=a+\frac{1}{a}-\left(a-\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{a}-a+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}.$

এখন $2(x^2+y^2)=(x+y)^2+(x-y)^2$

$=(2a)^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2=4a^2+\frac{4}{a^2}=4\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$

$\therefore\quad x^2+y^2=2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)$

উদা. 8. দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর :

$(x+2b)^2+2(x+3b)(2x+5b).$

উঃ মনে কর, $2x+5b=A$ এবং $x+3b=B$;

$\therefore\quad A-B=(2x+5b)-(x+3b)=(x+2b)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=(A-B)^2+2AB=A^2+B^2$

$=(2x+5b)^2+(x+3b)^2$

সূত্র : $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$

উদা 9. $a+b=3\sqrt{x}$ এবং $a-b=\frac{x}{2}$ হইলে ab-এর মান কত ?

উঃ $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$

$$=(3\sqrt{x})^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2=9x-\frac{x^2}{4}=\frac{36x-x^2}{4}$$

$$\therefore \quad ab=\frac{36x-x^2}{16}.$$

বিঃ দ্রঃ যেহেতু $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$

$$\therefore \quad ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

অর্থাৎ, দুইটি রাশির গুণফল

$$=\left(\frac{\text{রাশিদ্বয়ের সমষ্টি}}{2}\right)^2-\left(\frac{\text{রাশিদ্বয়ের অন্তর}}{2}\right)^2$$

উদা. 10. $(2a-b)(2a+b)(4a^2+b^2)$-কে দুইটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

উঃ $(2a-b)(2a+b)(4a^2+b^2)$

$=[4a^2+2ab-2ab-b^2](4a^2+b^2)$

$=(4a^2-b^2)(4a^2+b^2)$

[এক্ষেত্রে, প্রথম দুইটি উৎপাদককে গুণ করিয়া প্রদত্ত রাশিটিকে দুইটি উৎপাদকে পরিণত করা হইল।]

এখন, $(2a-b)(2a+b)(4a^2+b^2)$

$=(4a^2-b^2)(4a^2+b^2)$

$$=\left(\frac{4a^2-b^2+4a^2+b^2}{2}\right)^2-\left(\frac{4a^2-b^2-4a^2-b^2}{2}\right)^2=16a^4-b^4$$

সূত্র : $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab.$

উদা. 11. $(a-b)^2=7$, $ab=8$ হইলে, $a+b$-এর মান কত হইবে ?

উঃ $(a-b)^2=(a-b)^2+4ab$

$=7^2+4.8=49+32$

$=81=(\pm 9)^2 \quad \therefore \quad a+b=\pm 9.$

সূত্র : $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

উদা. 12. $a+b=10$ এবং $ab=21$ হইলে $a-b$-এর মান নির্ণয় কর।

উঃ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=(10)^2-4.21=100-84$

$=16=(\pm 4)^2. \quad \therefore \quad a-b=\pm 4.$

সূত্র : $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$

অনুসিদ্ধান্ত 1. $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

অনুসিদ্ধান্ত 2. $2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2.$

উদা. 13. যদি $a+b+c=15$ এবং $a^2+b^2+c^2=77$ হয়, তবে $ab+bc+ca$-এর মান নির্ণয় কর। [ক. প্র. '45]

উঃ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

বা, $(15)^2=77+2(ab+bc+ca)$

বা, $2(ab+bc+ca)=225-77$

বা, $ab+bc+ca=74.$

উদা. 14. $a+b+c=10$ এবং $ab+bc+ca=31$ হইলে $\frac{2}{19}(a^2+b^2+c^2)$ এর মান নির্ণয় কর।

উঃ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

বা, $(10)^2=(a^2+b^2+c^2)+2.31.$

বা, $a^2+b^2+c^2=38$

$\therefore \quad \frac{2}{19}(a^2+b^2+c^2)=\frac{2}{19}\times 38=4.$

প্রশ্নমালা 3

সূত্রের সাহায্যে নিম্নের রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :

1. $x+2y$ 2. $2x-y$ 3. $-c^2-\frac{1}{c^2}$ 4. 203

5. $a+b-c$ 6. $2x+3y+1$ 7. $x^2-4-\frac{1}{x^2}$

8. $x^2-xy-x-y$.

সরল কর :

9. $(5a+4x)^2-2(5a+4x)(4a+5x)+(4a+5x)^2$

10. $2{\cdot}1\times2{\cdot}1-4{\cdot}2\times0{\cdot}9+0{\cdot}9\times0{\cdot}9$

11. $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-\frac{2}{x^2}(x^4-4)$

12. $(a-b+c)^2-2\{(a-b)^2-c^2\}+(a-b-c)^2$

নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে দুইটি রাশির বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর :

13. (i) $(a-2b)^2-2(a-x)(x-2b)$ (ii) $(a-c)^2+2(a-3b)(c-3b)$
(iii) $2\{(x-y+z)^2+(y+z-x)^2\}$ (iv) $(a^2+b^2)^2$

নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে দুইটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :

14. (i) $0{\cdot}95\times1{\cdot}05$ (ii) $(5x-7y+12z)(x-y+2z)$
(iii) $(2x+1)(3x+2)(4x+3)$ (iv) x (v) $a-3$

15. $5x=3y$ হইলে, $(3x-2y)^2+(y-2x)^2-2(3x-2y)(y-2x)$-এর মান নির্ণয় কর।

16. $x^2+y^2=1$ হইলে, দেখাও যে $(3x-4x^3)^2+(4y^3-3y)^2=1$

17. $x+y=7$ এবং $xy=5$ হইলে, $(x-y)^2$-এর মান নির্ণয় কর।

18. $a+b=9$ এবং $a-b=1$ হইলে, ab-এর মান কত ?

19. $m=n+\sqrt{7}$ এবং $mn=3$ হইলে, m^2+n^2-এর মান নির্ণয় কর।

20. $x+\frac{1}{x}=14$ হইলে, (i) $x^2+\frac{1}{x^2}$ এবং (ii) $x^4+\frac{1}{x^4}$-এর মান কত ?

21. $p-\frac{1}{p}=12$ হইলে, (i) $p^2+\frac{1}{p^2}$ এবং (ii) $p^4+\frac{1}{p^4}$-এর মান নির্ণয় কর।

22. যদি $bx=ay$ হয়, তবে দেখাও যে, $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2$

23. $a^2+b^2+c^2=9$ এবং $ab+bc+ca=8$ হইলে, $(a+b+c)^3$-এর মান কত ?

24. $x+y+z=13$ এবং $xy+yz+zx=50$ হইলে, $x^2+y^2+z^2$-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '11]

25. $a+b+c=5$ এবং $a^2+b^2+c^2=13$ হইলে, $ab+bc+ca$-এর মান নির্ণয় কর।

26. $a-b-c=2$, $-ab+bc-ca=-25$ হইলে, $a^2+b^2+c^2$-এর মান কত ?

27. যদি $ax+by=m$, $bx-ay=n$ এবং $a^2+b^2=1$ হয়, তবে x^2+y^2-এর মান নির্ণয় কর।

---

10. দুইটি রাশির সমষ্টি এবং অন্তরের গুণফল ঃ

মনে কর, প্রথম রাশি a এবং দ্বিতীয় রাশি b.

অতএব, $(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$.

উদা. 1. $(a+b+c)(b+c-a)$-এর গুণফল নির্ণয় কর।

উঃ $(a+b+c)(b+c-a)$

$=\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}$

$=(b+c)^2-a^2$

$=b^2+2bc+c^2-a^2$

$=b^2+2bc+c^2-a^2$

উদা. 2. সরল কর : $\dfrac{1}{1+x+x^2}-\dfrac{1}{1-x+x^2}+\dfrac{2x}{1-x^2+x^4}$

উঃ $\dfrac{1}{1+x+x^2}-\dfrac{1}{1-x+x^2}+\dfrac{2x}{1-x^2+x^4}$

$=\dfrac{1-x+x^2-1-x-x^2}{\{(1+x^2)+x\}\{(1+x^2)-x\}}+\dfrac{2x}{1-x^2+x^4}$

$=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2-x^2}+\dfrac{2x}{1-x^2+x^4}$

5. $a+b-c$ 6. $2x+3y+1$ 7. $x^2-4-\frac{1}{x^2}$

8. $x^2-xy-x-y$.

সরল কর :

9. $(5a+4x)^2-2(5a+4x)(4a+5x)+(4a+5x)^2$

10. $2{\cdot}1\times2{\cdot}1-4{\cdot}2\times0{\cdot}9+0{\cdot}9\times0{\cdot}9$

11. $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-\frac{2}{x^2}(x^4-4)$

12. $(a-b+c)^2-2\{(a-b)^2-c^2\}+(a-b-c)^2$

নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে দুইটি রাশির বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর :

13. (i) $(a-2b)^2-2(a-x)(x-2b)$ (ii) $(a-c)^2+2(a-3b)(c-3b)$
(iii) $2\{(x-y+z)^2+(y+z-x)^2\}$ (iv) $(a^2+b^2)^2$

নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে দুইটি রাশির বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :

14. (i) $0{\cdot}95\times1{\cdot}05$ (ii) $(5x-7y+12z)(x+y+2z)$
(iii) $(2x+1)(3x+2)(4x+3)$ (iv) x (v) $a-3$

15. $5x=3y$ হইলে, $(3x-2y)^2+(y-2x)^2-2(3x-2y)(y-2x)$-এর মান নির্ণয় কর।

16. $x^2+y^2=1$ হইলে, দেখাও যে $(3x-4x^3)^2+(4y^3-3y)^2=1$

17. $x+y=7$ এবং $xy=5$ হইলে, $(x-y)^2$-এর মান নির্ণয় কর।

18. $a+b=9$ এবং $a-b=1$ হইলে, ab-এর মান কত ?

19. $m=n+\sqrt{7}$ এবং $mn=3$ হইলে, m^2+n^2-এর মান নির্ণয় কর।

20. $x+\frac{1}{x}=14$ হইলে, (i) $x^2+\frac{1}{x^2}$ এবং (ii) $x^4+\frac{1}{x^4}$-এর মান কত ?

21. $p-\frac{1}{p}=12$ হইলে, (i) $p^2+\frac{1}{p^2}$ এবং (ii) $p^4+\frac{1}{p^4}$-এর মান নির্ণয় কর।

22. যদি $bx=ay$ হয়, তবে দেখাও যে, $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2$

23. $a^2+b^2+c^2=9$ এবং $ab+bc+ca=8$ হইলে, $(a+b+c)^3$-এর মান কত ?

24. $x+y+z=13$ এবং $xy+yz+zx=50$ হইলে, $x^2+y^2+z^2$-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '11]

25. $a+b+c=5$ এবং $a^2+b^2+c^2=13$ হইলে, $ab+bc+ca$-এর মান নির্ণয় কর।

26. $a-b-c=2$, $-ab+bc-ca=-25$ হইলে, $a^2+b^2+c^2$-এর মান কত ?

27. যদি $ax+by=m$, $bx-ay=n$ এবং $a^2+b^2=1$ হয়, তবে x^2+y^2-এর মান নির্ণয় কর।

---

10. দুইটি রাশির সমষ্টি এবং অন্তরের গুণফল :

মনে কর, প্রথম রাশি a এবং দ্বিতীয় রাশি b.

অতএব, $(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$.

উদা. 1. $(a+b+c)(b+c-a)$-এর গুণফল নির্ণয় কর।

উঃ $(a+b+c)(b+c-a)$

$=\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}$

$=(b+c)^2-a^2$

$=b^2+2bc+c^2-a^2$

$=b^2+2bc+c^2-a^2$

উদা. 2. সরল কর : $\dfrac{1}{1+x+x^2}-\dfrac{1}{1-x+x^2}+\dfrac{2x}{1-x^2+x^4}$

উঃ $\dfrac{1}{1+x+x^2}-\dfrac{1}{1-x+x^2}+\dfrac{2x}{1-x^2+x^4}$

$=\dfrac{1-x+x^2-1-x-x^2}{\{(1+x^2)+x\}\{(1+x^2)-x\}}+\dfrac{2x}{1-x^2+x^4}$

$=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2-x^2}+\dfrac{2x}{1-x^2+x^4}$

$$=2x\left[\frac{1}{1-x^2+x^4}-\frac{1}{(1+x^2)^2-x^2}\right]$$

$$=2x\left[\frac{1}{1-x^2+x^4}-\frac{1}{1+2x^2+x^4-x^2}\right]$$

$$=2x\left[\frac{1}{(1+x^4)-x^2}-\frac{1}{(1+x^4)+x^2}\right]$$

$$=2x\left[\frac{1+x^4+x^2-1-x^4+x^2}{(1+x^4)^2-(x^2)^2}\right]$$

$$=\frac{2x.2x^2}{1+2x^4+x^8-x^4}=\frac{4x^3}{1+x^4+x^8}.$$

11. দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ :

উদা. 3. $x^2-13x+12$-কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=x^2-13x+12$

$$=x^2-13x+(\tfrac{13}{2})^2+12-(\tfrac{13}{2})^2$$

$$=(x-\tfrac{13}{2})^2-(\tfrac{11}{2})^2.$$

উদা. 4. $25x^4+4x^2y^2+4y^4$-কে দুই রাশির বর্গের অন্তরফলরূপে প্রকাশ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=25x^4+4x^2y^2+4y^4$

$$=(5x^2)^2+(2y^2)^2+2.5x^2.2y^2-16x^2y^2$$

$$=(5x^2+2y^2)^2-(4xy)^2.$$

উদা. 5. $a^2+3b^2-c^2-4ab+2bc$-কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=a^2+3b^2-c^2-4ab+2bc$

$$=a^2-2.a.2b+4b^2-b^2+2bc-c^2$$

$$=(a-2b)^2-(b^2-2bc+c^2)$$

$$=(a-2b)^2-(b-c)^2$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি$=x^3+y^3$

$$=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$=(2a)^3-3\{a^2-(b-c)^2\}.2a$$
$$=8a^3-3\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}.2a$$
$$=8a^3-6a(a^2-b^2+2bc-c^2)$$
$$=8a^3-6a^3+6ab^2-12abc+6ac^2$$
$$=2a^3+6ab^2+6ac^2-12abc.$$

উদা. 3. যদি $x+\frac{1}{x}=\sqrt{3}$ হয়, তবে $x^3+\frac{1}{x^3}=?$

উঃ $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3.x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$$=(\sqrt{3})^3-3.\sqrt{3}=3\sqrt{3}-3\sqrt{3}=0.$$

উদা. 4. $2p-\frac{2}{p}=1$ হইলে $p^3-\frac{1}{p^3}$-এর মান নির্ণয় কর।

উঃ $2p-\frac{2}{p}=1$ বা, $2\left(p-\frac{1}{p}\right)=1.$ বা, $p-\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $p^3-\frac{1}{p^3}=\left(p-\frac{1}{p}\right)^3+3.p.\frac{1}{p}\left(p-\frac{1}{p}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3.\frac{1}{2}=\frac{13}{8}.$

উদা. 5. যদি $a+b+c=0$ হয় তবে দেখাও যে $a^3+b^3+c^3=3abc$

উঃ $a+b+c=0$

বা, $a+b=-c$, [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $(a+b)^3=(-c)^3$

বা, $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$

বা, $a^3+b^3-3abc=-c^3$, [$\because$ $a+b=-c$]

বা, $a^3+b^3+c^3=3abc.$ [পক্ষান্তর করিয়া]

সূত্র $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

উদা. 6. $(9x+2y)$-কে $(81x^2-18xy+4y^2)$ দ্বারা গুণ কর।

উঃ $(9x+2y)(81x^2-18xy+4y^2)$

$$=(9x+2y)\{(9x)^2-9x.2y+(2y)^2\}$$
$$=(9x)^3+(2y)^3=729x^3+8y^3.$$

সূত্র 6. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

উদা. 7. $(2a-5)$-কে $(4a^2+10a+25)$ দ্বারা গুণ কর।

উঃ $(2a-5)(4a^2+10a+25)$

$=(2a-5)\{(2a)^2+2a.5+(5)^2\}$

$=(2a)^3-(5)^3=8a^3-125.$

উদা. 8. যদি $a+b+c=5$ এবং $ab+bc+ca=5$ হয়, তবে দেখাও যে $a^3+b^3+c^3-3abc=50.$

উঃ $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b).c+c^2\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\{a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab\}$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)\{(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-3(ab+bc+ca)\}$

$=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}$

$=5(5^2-3.5)=50.$

প্রশ্নমালা 5

ঘন নির্ণয় কর :

1. $ab+bc$ 2. $4x-3y$ 3. $-5x-2y$ 4. $2x+y+z$.

5. $3a-b+c$ 6. $xy-x-1$ 7. $x+\frac{1}{x}-2$.

সরল কর :

8. $(2x+y)^3+3(2x+y)^2(x-y)+3(2x+y)(x-y)^2+(x-y)^3$

9. $(3-2a)^3-3(3-2a)^2(4+a)+3(3-2a)(4+a)^2-(4+a)^3$

10. $(2a-b-c)^3+9a(2a-b-c)(a+b+c)+(a+b+c)^3$

11. $\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3+6\left(\frac{1-x^4}{x^3}\right)^2-\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^3$

12. $(x-y-z)^3+(x+y+z)^3$

প্রশ্নমালা 4

সূত্রের সাহায্যে গুণ কর :

1. $(3a-5b)(3a+5b)$ 2. $(-9a+5)(-9a-5)$

3. $(x^3-2x+1)(x^3+2x-1)$

4. $(a^2-a+1)(a^2+a+1)(a^4+a^2+1)$

সরল কর :

5. $\dfrac{x^2-(y-z)^2}{(z+x)^2-y^2}+\dfrac{y^2-(z-x)^2}{(x+y)^2-z^2}+\dfrac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2}$

6. $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

7. $\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{1+x^2}{1-x^2}+\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ [C. U. '55]

নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর :

8. x^2+4x+3 9. $x^2-36-16x$ 10. $4a^4+81y^4$

11. $9a^4-a^2b^2+16b^4$ 12. $a^2-b^2-2ac+2bc$

13. $a^2+5b^2+6ab-4bc-c^2$

14. যদি $x=\dfrac{1+a}{1-a}$ এবং $y=\dfrac{1-a}{1+a}$ হয়, তবে $\dfrac{x-y}{1+xy}$-এর মান নির্ণয় কর।

15. যদি $x=b+c$, $y=c+a$ এবং $z=a-b$ হয়, তবে দেখাও যে $x^2-y^2+2zx+z^2=0$.

16. যদি $p=x+\dfrac{1}{x}$ এবং $q=x-\dfrac{1}{x}$ হয়, তবে $p^4+q^4-2p^2q^2$-এর মান নির্ণয় কর।

17. যদি $x=b+c-2a$, $y=c+a-2b$, $z=a+b-2c$ হয়, তবে $x^2+y^2-z^2+2xy$-এর মান কত ?

18. যদি $a+b=\sqrt{3}$ এবং $a-b=1$ হয়, তবে দেখাও যে $a^4-b^4=2\sqrt{3}$.

সূত্র $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

অনু. সি. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$.

সূত্র $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$
$=a^3-b^3-3ab(a-b).$

অনু. সি. $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b).$

উদা. 1. নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন নির্ণয় কর :
(i) $(a+b+c)$ (ii) $(x-y-3)$

উঃ (i) এখানে $(a+b)$-কে প্রথম রাশি এবং c-কে দ্বিতীয় রাশি ধর।

$\therefore (a+b+c)^3=\{(a+b)+c\}^3$
$=(a+b)^3+3(a+b)^2.c+3(a+b)c^2+c^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3(a^2+2ab+b^2).c$
$+3ac^2+3bc^2+c^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc$
$+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$
$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2$
$+3b^2c+3ac^2+3bc^2+6abc.$ [সাজাইয়া লিখিয়া]

(ii) $(x-y-3)^3=\{(x-y)-3\}^3$
$=(x-y)^3-3(x-y)^2.3+3(x-y).3^2-3^3$
$=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-9(x^2-2xy+y^2)+27x-27y-27$
$=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-9x^2+18xy-9y^2+27x-27y-27$
$=x^3-y^3-3x^2y+3xy^2+18xy-9x^2-9y^2+27x-27y-27.$

উদা. 2. সরল কর :

(i) $(3x-5y)^3+(3y-x)^3+6(3x-5y)(3y-x)(x-y).$

(ii) $(a+b-c)^3+(a-b+c)^3.$

উঃ (i) মনে কর $(3x-5y)=p$ এবং $(3y-x)=q$;
অতএব $(p+q)=3x-5y+3y-x=2(x-y).$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=p^3+q^3+6pq(x-y)$
$=p^3+q^3+3pq.2(x-y)$
$=p^3+q^3+3pq(p+q).$ [$\because$ $2(x-y)=p+q$]
$=(p+q)^3=\{2(x-y)\}^3=8(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)$
$=8x^3-24x^2y+24xy^2-8y^3.$

(ii) মনে কর : $a+b-c=x$ এবং $a-b+c=y$;
অতএব $x+y=a+b-c+a-b+c=2a$ এবং
$xy=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}=a^2-(b-c)^2.$

অতএব এই অবস্থায় রাশিটি উৎপাদকে বিশ্লেষিত হয় নাই। আবার $x^4+2x^2-24=(x-2)(x+2)(x^2+6)$, এখানে $x-2$, $x+2$, x^2+6 প্রত্যেকে মৌলিক উৎপাদক। অতএব এই অবস্থায় x^4+2x^2-24 উৎপাদকে বিশ্লেষিত হইয়াছে।

আবার একটি রাশিকে একাধিকভাবে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

যেমন, $x^4+2x^2-24=(x-2)(x+2)(x^2+6)$

$$=(-x+2)(-x-2)(x^2+6)=(x-2)(-x-2)(-x^2-6)$$

উহাদের যে-কোন একভাবে রাশিটিকে প্রকাশ করিলে রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণ সম্পন্ন হইয়াছে একথা বলা হইবে।

সাধারণ প্রক্রিয়ার দ্বারা উৎপাদক নির্ণয়।

উদা. 1. $5x^2-(5a+2b)x+2ab$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=5x^2-(5a+2b)x+2ab$

$$=5x^2-5ax-2bx+2ab$$
$$=5x(x-a)-2b(x-a)$$
$$=(x-a)(5x-2b).$$

উদা. 2. $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+3xyz$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশি $=\{xy(x+y)+xyz\}+\{yz(y+z)+xyz\}+\{zx(z+x)+xyz\}$

$$=xy(x+y+z)+yz(y+z+x)+zx(z+x+y)$$
$$=(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

13. সূত্রের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয় :

(i) $a^2+2ab+b^2$; (ii) $a^2-2ab+b^2$; (iii) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ আকারে প্রকাশিত রাশির উৎপাদক।

(i) $a^2+2ab+b^2=a^2+ab+ab+b^2$, [$2ab$-কে $(ab+ab)$ লিখিয়া]

$$=a(a+b)+b(a+b)=(a+b)(a+b)$$

(ii) $a^2-2ab+b^2=a^2-ab-ab+b^2$, [$-2ab$কে $(-ab-ab)$ লিখিয়া]

$$=a(a-b)-b(a-b)=(a-b)(a-b).$$

(iii) $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$=(a^2+2ab+b^2)+2ca+2bc+c^2$$
$$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2=(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c).$$

উদা. 3. $9x^2-6(xy+xz)+(y+z)^2$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=9x^2-6(xy+xz)+(y+z)^2$

$$=(3x)^2-2.3x(y+z)+(y+z)^2$$
$$=\{3x-(y+z)\}^2=(3x-y-z)^2$$
$$=(3x-y-z)(3x-y-z).$$

উদা. 4. $a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ac$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ac$

$$=(a^2-2ab+b^2)+4ac-4bc+4c^2$$
$$=(a-b)^2+4c(a-b)+4c^2$$
$$=(a-b)^2+2.(a-b).2c+(2c)^2$$
$$=(a-b+2c)^2=(a-b+2c)(a-b+2c).$$

প্রশ্নমালা 6

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $5x^2+3xy+9x$
2. $9x^3-6x^2y+3x-2y$
3. a^3+a^2+a+1
4. $6x^2+(2a+3b)x+ab$
5. $px^2-(p^2+1)x+p$
6. $xy(1+z^2)+z(x^2+y^2)$; [S.F. '56]
7. $a(b+c)-b(a-c)+2c(a-b)$
8. $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+3xyz$ [S. F. '69]
9. $(b-c)(1+a)+(a-b)(1+c)$
10. $9a^2+30ab+25b^2$
11. $64x^2-96xy+36y^2$
12. $68a^2b^2-168a^2b+112a^2$
13. $a^2-4ab-2ac+(2b+c)^2$
14. $36+12x-36y+(x-3y)^2$
15. $x^4+(x-3)^2+2x^3-6x^2$
16. $p^2+2pq+q^2-p-q$ [D. B. '14]
17. $a(b+c)^2-b(c+a)^2$
18. $a^2+b^2+2ab+2a+2b+1$
19. $4a^2-4(ab-ac)+b^2-2bc+c^2$
20. $81-18(x+2y)+x^2+4xy+4y^2$
21. $x^2+4y^2+9z^2-4xy-6zx+12yz$
22. $2a^2b^2+2b^2c^2-2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$
23. $a^4+2a^3-a^2-2a+1$
24. $4(x+y)^2+9(y-z)^2+(z-x)^2-6(y-z)(z-x)$
$-12(x+y)(y-z)+4(z-x)(x+y).$

14. a^2-b^2 রূপে প্রকাশিত রাশিমালার উৎপাদক।

$a^2-b^2=a^2+ab-ab-b^2=a(a+b)-b(a+b)=(a+b)(a-b).$

অতএব দুইটি রাশির বর্গের বিয়োগফলের উৎপাদক উক্ত রাশিদ্বয়ের যোগফল এবং বিয়োগফল হইতে প্রাপ্ত রাশিদ্বয়ের গুণফল হইবে।

13. $(ab-bc+ca)^3-(ab+bc+ca)^3$

14. $(b-c)(b^2+bc+c^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)+(a-b)(a^2+ab+b^2)$

15. $\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} \div \frac{1}{a^2+ab+b^2} \times \frac{a^3+b^3}{(a+b)^3} \div \frac{a^2-ab+b^2}{(a+b)^2}$

16. $y+y=8, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$ হইলে x^3+y^3-এর মান নির্ণয় কর।

17. $2x-\frac{2}{x}=3$ হইলে দেখাও যে $8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$.

18. $x+y=1+xy$ হইলে, দেখাও যে $x^3+y^3=1+x^3y^3$.

19. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$ হইলে, দেখাও যে $a^3+\frac{1}{a^3}=0$ [C. U. '24]

20. $x=y+z$ হইলে দেখাও যে, $x^3-y^3-z^3=3xyz$.

21. $x-y=5$ এবং $\frac{2}{x}=\frac{3}{y}$ হইলে x^3-y^3-এর মান কত?

22. $x=2+2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$ হইলে x^3-6x^2+6x-2-এর মান নির্ণয় কর।

23. যদি $a+b+c=7$ এবং $ab+bc+ca=16$ হয়, তবে $a^3+b^3+c^3-3abc$-এর মান নির্ণয় কর।

24. $a+b+c=8$ এবং $a^2+b^2+c^2=30$ হইলে $a^3+b^3+c^3-3abc$-এর মান কত?

25. $x+y=p, x^2+y^2=q^2$ এবং $x^3+y^3=r^3$ হইলে দেখাও যে $p^3+2r^3=3pq^2$.

তৃতীয় অধ্যায়

উৎপাদক নির্ণয় (Factorization)

12. অষ্টম শ্রেণীতে একটি রাশির উৎপাদক বলিতে কি বোঝায় তাহা আলোচনা করা হয়। পাটীগণিতেও উৎপাদক শেখান হয়। পাটীগণিতে সাধারণতঃ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার উৎপাদক নির্ণয়ের প্রণালী আলোচিত হয়। এখানে বীজগণিতের সেই সমস্ত রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণ শেখান হইবে যাহাদের সহগগুলি পূর্ণসংখ্যা। যেমন, $7x^2+8x+1$ রাশিটির সগহগুলি পূর্ণসংখ্যা। অন্য কিছু উল্লেখ করা না থাকিলে এই অধ্যায়ের আলোচিত রাশিগুলি সর্বদা পূর্ণসংখ্যা সহগযুক্ত হইবে।

সংজ্ঞা : B রাশিকে A রাশির উৎপাদক (factor) বলা হইবে যদি B রাশির দ্বারা A রাশি বিভাজ্য হয়। অর্থাৎ অন্য একটি রাশি C যদি এরূপভাবে নির্ণয় করা যায় যে, $A=B.C$ তাহা হইলে B-কে A রাশির উৎপাদক বলা হইবে।

যথা, $x+1$ রাশি x^2+4x+3-এর উৎপাদক ; কারণ $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$; কিন্তু $2x+5$ রাশি x^2+4x+3-এর উৎপাদক নয়।

সংজ্ঞা : B রাশিকে A রাশির মৌলিক উৎপাদক বলা হইবে যদি B রাশি A রাশির একটি উৎপাদক হয় এবং B রাশিটি একমাত্র 1, -1, B এবং $-B$ দ্বারা বিভাজ্য হয়। যথা $x+1$, x^2+4x+3-এর একটি মৌলিক উৎপাদক।

আবার, $x^4+2x^2-24=(x^4-4)(x^2+6)$ হইতে দেখা যায় যে x^2-4, x^4+2x^2-24-এর একটি উৎপাদক ; কিন্তু x^2-4 রাশিটি 1, -1, x^2-4 এবং $-(x^2-4)$ ছাড়াও অন্য রাশিদ্বারা যেমন $x+2$ দ্বারা বিভাজ্য। অতএব x^2-4 উক্ত রাশির মৌলিক উৎপাদক নয়।

উপপাদ্য : B রাশি যদি A রাশির মৌলিক উৎপাদক হয়, তবে $-B$, A রাশির মৌলিক উৎপাদক হইবে।

প্রমাণ : B রাশি A রাশির উৎপাদক। ধর $A=BD$ $\therefore$ $A=(-B)(-D)$ অতএব $-B$ রাশি A-এর উৎপাদক। আবার B একটি মৌলিক উৎপাদক অর্থাৎ B একমাত্র 1, -1, B এবং $-B$ দ্বারা বিভাজ্য। অতএব $-B$-ও একমাত্র 1, -1, B এবং $-B$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে। $\therefore$ $-B$ একটি মৌলিক উৎপাদক।

সংজ্ঞা : একটি রাশি উৎপাদকে বিশ্লেষিত হইয়াছে, একথা তখনই বলা হইবে যখন রাশিটিকে কতকগুলি মৌলিক উৎপাদকের গুণফলে প্রকাশ করা হইবে।

যথা, $x^4+2x^2-24=(x^2-4)(x^2+6)$, এখানে x^2-4 মৌলিক উৎপাদক ন।

18. x^4-23x^2+1 19. $4a^4+32a^2+81$ 20. x^8+x^4+1

21. $5x^2-28x-49$ 22. $2a^2-4ab+2b^2-8c^2$

23. $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$ [S F. '69]

24. $125(2x-1)^2-605(x+1)^2$ 25. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$

26. $4(xy+kz)^2-(x^2+y^2-z^2-k^2)^2$

27. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$ 28. $a^2-c^2+5b^2-6ab+4bc$

29. $16-3x^2-y^2-4xy-8x$ 30. $(x-1)(x+11)+20$

31. $(x-1)^3+9(x^2-1)$ 32. $3x^2-y^2-z^2-2xy-2yz-2zx$

33. $x^4-2x^2a^2-2x^2b^2+a^4+b^4-2a^2b^2$

34. $a^2+2ab-2ac-3b^2+2bc$ 35. $25a^2-45-9x^2-20a+42x$

36. $x^2-y^2+15z^2-2yz-8xz$

37. $9(x^2-1)+30xy+25y^2-4a^2-12a$

38. $(x^2-5x+13)(x^2-5x+3)+16$

39. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$

40. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+13$

41. $(x+a)(x+4a)(x+3a)(x+6a)+8a^4$

42. $(2x+3)(2x+5)(2x+7)(2x+9)+15.$

16 (i) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ এবং (ii) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ আকারের রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় :

(i) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$

$$=a^2(a+b)+2ab(a+b)+b^2(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a+b)(a+b)$$

(iii) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3.$

$$=a^2(a-b)-2ab(a-b)+b^2(a-b)$$
$$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$$
$$=(a-b)(a-b)^2=(a-b)(a-b)(a-b).$$

উদা. 1. $8x^3+60x^2+150x+125$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=(2x)^3+3(2x)^2.5+3.2x(5)^2+(5)^3$

$$=(2x+5)^3=(2x+5)(2x+5)(2x+5).$$

উদা. 2. $(2x+5y)^3-9(2x+5y)^2(x+2y)+27(2x+5y)(x+2y)^2$ $-27(x+2y)^3$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=(2x+5y)^3-3(2x+5y)^2.3(x+2y)$ $+3(2x+5y)\{3(x+2y)\}^2-\{3(x+2y)\}^3$

$$=\{(2x+5y)-3(x+2y)\}^3$$
$$=\{-(x+y)\}^3=-(x+y)^3=-(x+y)(x+y)(x+y).$$

17. (i) a^3+b^3 এবং (ii) a^3-b^3 আকারের রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

(i) $a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3$
$=a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2).$

(ii) $a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3$
$=a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b)$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$

উদা 3. $27x^3+343y^3$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=(3x)^3+(7y)^3$
$=(3x+7y)\{(3x)^2-(3x)(7y)+(7y)^2\}$
$=(3x+7y)(9x^2-21xy+49y^2).$

উদা. 4. $x^3-y^3+xy(x-y)$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=x^3-y^3+xy(x-y)$
$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)$
$=(x-y)\{(x^2+xy+y^2)+xy\}$
$=(x-y)(x^2+2xy+y^2)$
$=(x-y)(x+y)^2=(x-y)(x+y)(x+y).$

প্রশ্নমালা 8

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^3+9x^2+27x+27$
2. $a^3-12a^2+48a-64$
3. $2p^3-3p^2q-3pq^2+2q^3$
4. $27a^3+b^3$
5. x^3-64y^3
6. x^6+y^6
7. $-a^3-27b^3$
8. $27a^9+x^{12}$
9. x^6-729y^6
10. $125a^5b^2-27a^2b^5$
11. $64x^{12}-1$
12. x^6-1
13. $(x-y)^3-125(x+y)^3$
14. $(x^2+y^2)^3+8x^3y^3$
15. $x^3+8y^3-2xy(x+2y)$
16. x^9-1
17. $125(a+b)^3+729(a-b)^3$
18. $x^4+x^3y+xz^3+yz^3$
19. $ab^3-b^4-c^3a+bc^3$
20. $2a^3-a^2b-b^3$
21. $a^3-9a^2+27a-91$
22. $m^3-n^3-m(m^2-n^2)+n(m-n)^2$
23. $4a^2(x^3+18ab^2)-(32a^5+9b^2x^3)$
24. দেখাও যে $(ax+by)^3+(bx+ay)^3$ রাশিটি $(a+b)$ এবং $(x+y)$ দ্বারা বিভাজ্য।

[C. U. '26]

উদা. 1. $(x-a)(x-b)^3-(x-a)^3(x-b)$-এর উৎপাদক নির্ণয় কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=(x-a)(x-b)^3-(x-a)^3(x-b)$

$$=(x-a)(x-b)\{(x-b)^2-(x-a)^2\}$$
$$=(x-a)(x-b)\{(x-b)+(x-a)\}\{(x-b)-(x-a)\}$$
$$=(x-a)(x-b)(2x-a-b)(a-b).$$

উদা. 2. $9x^2-12xy-4yz-z^2$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=9x^2-12xy-4yz-z^2$

$$=9x^2-z^2-4y(3x+z)$$
$$=(3x)^2-(z)^2-4y(3x+z)$$
$$=(3x+z)(3x-z)-4y(3x+z)$$
$$=(3x+z)(3x-z-4y).$$

উদা. 3. $x^2-y^2-6xa+2ya+8a^2$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=x^2-y^2-6xa+2ya+8a^2$

$$=(x)^2-2.x.3a+(3a)^2-y^2+2ya-a^2$$
$$=(x-3a)^2-(y^2-2ya+a^2)$$
$$=(x-3a)^2-(y-a)^2$$
$$=\{(x-3a)+(y-a)\}\{(x-3a)-(y-a)\}$$
$$=(x-3a+y-a)(x-3a-y+a)$$
$$=(x+y-4a)(x-y-2a).$$

উদা. 4. $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি

$$=\{2(ab+cd)\}^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$
$$=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$
$$=\{(2ab+2cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\}\{(2ab+2cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\}$$
$$=(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)$$
$$=\{(a^2+b^2+2ab)-(c^2-2cd+d^2)\}\{(c^2+2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)\}$$
$$=\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}$$
$$=[\{(a+b)+(c-d)\}\{(a+b)-(c-d)\}][\{(c+d)+(a-b)\}\{(c+d)-(a-b)\}]$$
$$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)$$

15. a^2-b^2 **আকারে প্রকাশযোগ্য রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ।** কোন কোন ক্ষেত্রে প্রদত্ত রাশিমালাটি a^2-b^2 আকারে দেওয়া থাকে না। এইরূপ ক্ষেত্রে রাশিমালাটিকে সাজাইয়া লিখিয়া অথবা উহার সহিত কোন পদকে

সংযোজন এবং সমপদকে বিয়োজন করিয়া উহাকে a^2-b^2 আকারে প্রকাশ করিয়া লওয়া হয়।

উদা. 5. a^4+4b^4-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ $a^4+4b^4=\{(a^2)^2+(2b^2)^2+2.a^2.2b^2\}-4a^2.b^2$
$=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$
$=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab).$

উদা. 6. $4x^2-y^2+8z^2+12xz-2yz$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ $4x^2-y^2+8z^2+12xz-2yz$
$=\{(2x)^2+2.2x.3z+(3z)^2\}-z^2-2yz-y^2$
$=(2x+3z)^2-(z^2+2yz+y^2)=(2x+3z)^2-(z+y)^2$
$=(2x+3z+z+y)(2x+3z-z-y)$
$=(2x+4z+y)(2x+2z-y).$

উদা. 7. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-8$-কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-8$
$=\{(x+2)(x+5)\}\{x+3)(x+4)\}-8$
$=\{x^2+7x+10\}\{x^2+7x+12\}-8$
$=(a+10)(a+12)-8$ [x^2+7x-এর পরিবর্তে a লিখিয়া]
$=a^2+22a+120-8$
$=a^2+22a+112$
$=\{(a)^2+2.a.11+(11)^2\}-(11)^2+112$
$=(a+11)^2-(3)^2$
$=(a+14)(a+8)$
$=(x^2+7x+14)(x^2+7x+8)$ [$\because a=x^2+7x$]

প্রশ্নমালা 7

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $4a^2-9$ 2. $64x^4-1$ 3. $3a^4b-27a^2b^3$
4. $x^2+a^2-b^2+2ax$ 5. $a^4+2a^3+a^2-1$ 6. $4x^4+81y^4$
7. a^8-16b^8 8. $625x^8+324y^4$ 9. $2ab-2ac+b^2-c^2$
10. $x^2y^2+1-x^2-y^2$ 11. $x^2-4(y^2-x-1)$
12. $x(x-4)-y(y-4)$ 13. $(a+2b)a^3-(b+2a)b^3$ [S.F. '57]
14. $x(x+z)-2y(2y-z)$ 15. $4x^2-4xy-2yz-z^2$
16. $16a^2-8ac+10bc-25b^2$ 17. x^4+4x^2-12

10. $3(2x^2-1)-7x$ 11. $(3x^2-2x)^2-25$ 12. $x+12-x^2$
13. $5-4x-x^2$ 14. $9+9x-4x^2$ 15. $2a^4-5a^2-3$
16. $2x^4+7x^2+5$ 17. $12x^4+a^2x^2-a^4$
18. $10a^4-96a^2b^2-40b^4$ 19. $10a^4b^2-46a^2b^3-20b^4$
20. $(2x-3yz)(2y+3yz)-9xyz$ 21. $2(a+b)^2+3(a+b)-2$
22. $3(a+b)^2-2a-2b-8$ 23. $(a-b)x^2+2ax+(a+b)$
24. $(p+1)x^2+(p-q)x-(q+1)$ 25. $(a^2+3)x^2+(a^2-1)x-4$
26. $(x+y)^2z^4-4xyz^2-(x-y)^2$
27. $(a^2-1)x^2+2(a^2+1)xy+(a^2-1)y^2$
28. $1-3(1-2x)+3(1-2x)(1-3x)$ 29. $2a^2+2a-3ab-b-b^2$
30. $4x^2-4xy+y^2+14x-7y-30$
31. $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)$
32. $(a^3-1)x^2-2(2a^2+1)x-(a^3+1)$.

20. দ্বিমাত্রিক রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ।

কোন দ্বিমাত্রিক রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত যে-কোন অক্ষরের (মনে কর x-এর) ক্রমানুসারে সাজাইলে উহা px^2+qx+r আকারে রূপান্তরিত হইবে। অতঃপর পূর্বের অনুচ্ছেদে বর্ণিত প্রণালী অনুসারে উহাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা হইয়া থাকে।

উদা 1. $3x^2+4xy+y^2+6y-27$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশিমালা $=3x^2+(4y)x+(y^2+6y-27)$
$=3x^2+(4y)x+(y^2+9y-3y-27)$
$=3x^2+(4y)x+y(y+9)-3(y+9)$
$=3x^2+(4y)x+(y+9)(y-3)$.

এখন $3(y+9)(y-3)$-কে এরূপ দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে যাহাদের বৈজিক যোগফল $4y$ হয়। স্পষ্টতঃ উৎপাদকদ্বয় যথাক্রমে $3(y-3)$ এবং $(y+9)$.

∴ প্রদত্ত রাশিমালা $=3x^2+3(y-3)x+(y+9)x+(y+9)(y-3)$
$=3x(x+y-3)+(y+9)(x+y-3)$
$=(x+y-3)(3x+y+9)$.

উদা. 2. $2x^2-2y^2+z^2-3xy-3xz+yz$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশিমালা $=2x^2+(-3y-3z)x-2y^2+yz+z^2$
$=2x^2+(-3y-3z)x-(y-z)(2y+z)$

এখন $-2(y-z)(2y+z)$-কে এরূপ দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে

যাহাদের বৈজিক সমষ্টি $(-3y-3z)$ হয়। স্পষ্টতঃ উৎপাদকদ্বয় যথাক্রমে $(y-z)$ এবং $-2(2y+z)$.

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = 2x^2+(y-z)x-2(2y+z)x-(y-z)(2y+z)$$
$$= x(2x+y-z)-(2y+z)(2x+y-z)$$
$$= (2x+y-z)(x-2y-z).$$

উদা. 3. $2a^2+6b^2-15c^2-7ab-bc-ca+7a-11b+12c+3$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ $\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = 2a^2+(-7b-c+7)a+(6b^2-15c^2-bc-11b+12c+3)$

$$= 2a^2+(-7b-c+7)a+(3b-5c-1)(2b+3c-3)$$

এখন $2(3b-5c-1)(2b+3c-3)$-কে এরূপ দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে যাহাদের বৈজিক যোগফল $(-7b-c+7)$ হয়। স্পষ্টতঃ উক্ত উৎপাদকদ্বয় যথাক্রমে $-(3b-3c-1)$ এবং $-2(2b+3c-3)$.

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশিমালা} = 2a^2-(3b-5c-1)a-2(2b+3c-3)a+(3b-5c-1)(2b+3c-3)$$
$$= a(2a-3b+5c+1)-(2b+3c-3)(2a-3b+5c+1)$$
$$= (2a-3b+5c+1)(a-2b-3c+3).$$

21. বিপরীত রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ

কোন রাশিমালাকে ইহার অন্তর্গত কোন অক্ষরের ঘাতক্রমে সাজাইলে যদি উহার প্রথম ও শেষপদ হইতে সমদূরবর্তী পদসমূহের সহগ সমান হয়, তবে উহাকে বিপরীত রাশিমালা (Reciprocal Expression) বলে। এইরূপ রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে উহার সমান সহগবিশিষ্ট পদগুলিকে বন্ধনীর মধ্যে আনিয়া রাশিমালাটিকে px^2+qx+r আকারে প্রকাশ করিয়া লইতে হয়।

উদা. 4. $6x^4-x^3+10x^2-x+6$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ $\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = 6x^4+6-x^3-x+10x^2$

$$= 6(x^4+1)-x(x^2+1)+10x^2$$
$$= 6\{(x^2+1)^2-2x^2\}-x(x^2+1)+10x^2$$
$$= 6(x^2+1)^2-x(x^2+1)-2x^2$$
$$= 6k^2-xk-2x^2 \quad [\, x^2+1=k \text{ ধরিয়া} \,]$$
$$= (3k-2x)(2k+x)$$
$$= (3x^2-2x+3)(2x^2+x+2)$$

18. x^2+px+q **আকারের ত্রিপদ রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ।**

নিয়ম ঃ x^2+px+q আকারের রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে (i) পরীক্ষার দ্বারা এইরূপ দুইটি উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি $=p$ এবং গুণফল $=q$ হয়। (ii) অতঃপর লব্ধ উৎপাদক দুইটির সাহায্যে px-কে প্রকাশ করিতে হইবে। (iii) সর্বশেষে প্রদত্ত রাশিমালাটির পদগুলিকে সংঘবদ্ধ করিয়া উহাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

উদা. 1. $(a+2b)^2+2(a+2b)-143$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ মনে কর $(a+2b)=x$; অতএব প্রদত্ত রাশি $=x^2+2x-143$

এখানে, $-143=(+13)\times(-11)$ এবং $(+13)x+(-11)x=2x$

$\therefore\ x^2+2x-143=x^2+13x-11x-143$

$=x(x+13)-11(x+13)=(x+13)(x-11)$

$=(a+2b+13)(a+2b-11)$ [x-এর মান বসাইয়া]

$\therefore\ (a+2b)^2+2(a+2b)-143=(a+2b+13)(a+2b-11).$

উদা. 2. $x^2+3x-(a+5)(a+8)$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ এখানে $-(a+5)(a+8)=\{+(a+8)\}\{-(a+5)\}$ এবং

$\{(a+8)\}x+\{-(a+5)\}x=3x$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=x^2+(a+8)x-(a+5)x-(a+5)(a+8)$

$=x(x+a+8)-(a+5)(x+a+8)$

$=(x+a+8)(x-a-5).$

প্রশ্নমালা 9

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ

1. $x^2+13x+42$
2. x^2-x-6
3. $a^2b^2-12abc+20c^2$
4. $p^2-15pq+44q^2$
5. $x^3y^3-9x^2y^2+20xy$
6. $x^2-49x+600$
7. $x^2-55x-576$
8. x^4+11x^2-180
9. x^4-25x^2+144
10. $x^4-14a^2x^2-32a^4$
11. $(x^2-2x)^2-11(x^2-2x)+24$
12. $(x^2-6x)^2-8(x^2-6x+8)-64$
13. $(x-1)^2+9(c^2-1)$
14. $x(x-1)(x-2)-3x+3$
15. $(x^2-4x)(x^2-4x-1)-26$
16. $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+4$
17. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$
18. $(5x+3)(5x+5)(5x+7)(5x+9)-9$
19. $(7x^2+3y)(7x^2+5y)(7x^2+6y)(7x^2+8y)+5y^4$

20. $ax^2-(a^2+1)x+a$
21. $(a+b)^2-5a-5b+6$
22. $(a+b)^2-10(a^2-b^2)-56(a-b)^2$
23. $ax^2-(a^2-1)x-a$
24. $x^2-x-a(a+1)$
25. $x^2+x-(a+2)(a+3)$
26. $x^2+ax+(2a-1)(1-a)$
27. x^2+3x-a^2-a+2
28. $x^2-2bx-(a^2-b^2)$
29. $x^2+ax-(6a^2-5ab+b^2)$
30. $x^2+(4a+1)x+3a^2-a-2$
31. $a^2+3ab-2ac-4b^2+2bc$
32. $x^2+2x(ab+1)+(a^2-1)(b^2-1)$.

19. px^2+qx+r আকারের ত্রিপদ রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ।

নিয়ম ঃ px^2+qx+r-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে—

(i) প্রথমে x^2-এর সহগ p এবং x-বর্জিত পদ r-এর গুণফলকে এইরূপ দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করিতে হইবে যাহাদের বীজগণিতীয় যোগফল x-এর সহগ q-এর সমান হয় ;

(ii) লব্ধ উৎপাদক দুইটির সাহায্যে qx-কে প্রকাশ করিতে হইবে এবং (iii) অবশেষে রাশিমালায় পদগুলিকে সংঘবদ্ধ করিয়া উহাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

উদা. 1. $6-a-12a^2$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ এখানে, $(+6)\times(-12)=72=(-9)\times(+8)$

এবং $(-9)a+(+8)a=-a$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=6-9a+8a-12a^2$

$=3(2-3a)+4a(2-3a)$

$=(2-3a)(3+4a)$.

উদা. 2. $a(a+1)x^2+x-a(a-1)$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ এখানে, $\{+a(a+1)\}\times\{-a(a-1)\}=-a^2(a^2-1)$

$=\{-(a^2-1)\}\times(+a^2)$ এবং $\{-(a^2-1)\}x+(+a^2)x=x$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=a(a+1)x^2-(a^2-1)x+a^2x-a(a-1)$

$=(a+1)x\{ax-(a-1)\}+a\{ax-(a-1)\}$

$=(ax-a+1)(ax+x+a)$.

প্রশ্নমালা 10

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ

1. $3x^2-5x-8$
2. $6x^2+x-15$
3. $12x^2-x-6$
4. $5x^2-29x+42$
5. $6x^2+7xy-20y^2$
6. $21x^2-37xy-28y^2$
7. $12x^2+13x-14$
8. $7x^2-25x+12$
9. $99a^2-202ab+99b^2$

22. পরীক্ষার দ্বারা উৎপাদক নির্ণয় :

মনে কর, px^2+qx+r একটি রাশি। ধর, রাশিটিতে x-এর পরিবর্তে a বসাইলে রাশির মান শূন্য হয়। অর্থাৎ $pa^2+qa+r=0$.

এখন রাশিটিকে $x-a$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\begin{array}{l} x-a \,\big)\, px^2+qx+r \,\big(\, px+(q+ap) \\ \qquad\quad \underline{px^2-apx} \\ \qquad\quad (q+ap)x+r \\ \qquad\quad \underline{(q+ap)x-a(q+ap)} \\ \qquad\qquad\quad a(q+ap)+r \end{array}$$

$\therefore$ ভাগশেষ $=a(q+ap)+r=aq+a^2p+r=pa^2+qa+r$.

$\therefore$ $px^2+qx+r=(x-a)\{px+q+ap\}+(pa^2+qa+r)$.

এখন রাশিটিতে $x=a$ বসাইলে রাশির মান যদি শূন্য হয়, তবে

$$px^2+qx+r=(x-a)\{px+q+ap\}+0$$
$$=(x-a)\{px+q+ap\}.$$

$\therefore$ $(x-a)$ উক্ত রাশির একটি উৎপাদক।

এইভাবে প্রমাণ করা যায় যে একটি প্রদত্ত রাশি A-তে $x=a$ বসাইলে যদি উক্ত রাশির মান শূন্য হয়, তবে $(x-a)$ ঐ রাশির একটি উৎপাদক হইবে।

এখন মনে কর, B একটি রাশি ; এই রাশিতে $x=-b$ বসাইলে, রাশির মান হয় শূন্য।

$\therefore$ উপরের সিদ্ধান্ত হইতে বলা যায় যে $\{x-(-b)\}$ অর্থাৎ $(x+b)$ প্রদত্ত রাশির উৎপাদক।

উদা. 5. $2x^3-13x^2+22x-8$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ $x=1$ হইলে, প্রদত্ত রাশি $=2.1^3-13.1^2+22.1-8=3$;

$x=-1$,, ,, $=2(-1)^3-13(-1)^2+22(-1)-8=-45$

$x=2$,, ,, $=2.2^3-13.2^2+22.2-8=0$

$\therefore$ $(x-2)$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি উৎপাদক।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=2x^3-4x^2-9x^2+18x+4x-8$

$$=2x^2(x-2)-9x(x-2)+4(x-2)$$
$$=(x-2)(2x^2-9x+4)$$
$$=(x-2)(2x^2-8x-x+4)$$
$$=(x-2)\{2x(x-4)-1(x-4)\}$$
$$=(x-2)(2x-1)(x-4).$$

23. $x^4+px^3+qx^2+rx+\frac{r^2}{p^2}$ **আকারের রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ।**

উদা. 6. $x^4-4x^3-11x^2+12x+9$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^4+9)-4x(x^2-3)-11x^2$

$=(x^2-3)^2+6x^2-4x(x^2-3)-11x^2$

$=k^2-4xk-5x^2$ [$x^2-3=k$ ধরিয়া]

$=(k-5x)(k+x)=(x^2-5x-3)(x^2+x-3)$.

প্রশ্নমালা 11

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^2+3xy+2y^2+y-1$
2. $3a^2-3b^2-a-5b-2$
3. $a^2+2ab-8b^2+4a-14b-5$
4. $a^2-3b^2+2ab-2ac+2bc$
5. $x^4+5x^3+8x^2+5x+1$
6. $5x^4-8x^3+6x^2-8x+5$
7. x^3-3x-2
8. x^3-3x+2
9. $x^3-11x+14$
10. $x^3+9x^2+26x+24$
11. a^3-2a^2-3a+4
12. x^3+2x^2-x-2. [S.F. '60]
13. $p^3+4p^2x-px^2-4x^3$
14. x^4-x^3+8x-8
15. $2a^2+b^2-2c^2-3ab+bc-3ac$.

24. $a^3+b^3+c^3-3abc$ **আকারের রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ।**

উদা. 1. $a^3+b^3+c^3-3abc$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশি $=a^3+(b^3+c^3)-3abc$

$=a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)-3abc$

$=(a+b+c)\{a^2-a(b+c)+(b+c)^2\}-3bc(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2-ab-ac+b^2+2bc+c^2-3bc)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

দ্রষ্টব্য : (1) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)\{\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\}$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$

(2) যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে $a^3+b^3+c^2-3abc=0$; অর্থাৎ, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

(3) যদি $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=0$ বা, $a=b=c$ হয়, তবে $a^3+b^3+c^3=3abc$.

উদা. 2. $x^3+(x-1)^3+(1-2x)^3$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ মনে কর, $a=x$, $b=x-1$ এবং $c=1-2x$.

$\therefore \quad a+b+c=x+x-1+1-2x=0$

$\therefore \quad a^3+b^3+c^3=3abc$ [দ্রষ্টব্য (2)]

$\therefore \quad x^3+(x-1)^3+(1-2x)^3=3x(x-1)(1-2x)$.

উদা. 3. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশিমালা $=\{(a+b)+c\}^3-a^3-b^3-c^3$

$=(a+b)^3+c^3+3(a+b).c(a+b+c)-a^3-b^3-c^3$

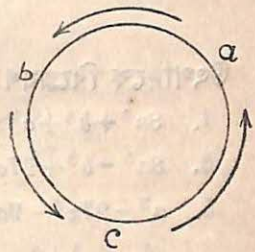
$=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+3(a+b)c(a+b+c)-a^3-b^3-c^3$

$=3ab(a+b)+3(a+b)c(a+b+c)$

$=3(a+b)(ab+ac+bc+c^2)=3(a+b)\{b(a+c)+c(a+c)\}$

$=3(a+b)(a+c)(b+c)=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

25. চক্রক্রম রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ :



কোন বৃত্তের পরিধির পার্শ্বে a, b এবং c অক্ষর তিনটিকে চিত্রানুসারে সাজাইয়া তীর চিহ্নের দিকে পর পর পড়িয়া গেলে a, b, c ; b, c, a ; c, a, b ক্রমটি পাওয়া যায়। a, b, c-এর ঐরূপ ক্রমকে চক্রক্রম (cyclic order) বলে। যে সকল রাশিমালায় a, b, c চক্রক্রমে সজ্জিত থাকে তাহাদের চক্রক্রম রাশিমালা বলে। যথা,

$a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$, $\quad bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ ইত্যাদি।

নিম্নে চক্রক্রম রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ-প্রণালী দেখান হইল।

উদা. 4. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

$=\{a^2(b+c)+abc\}+\{b^2(c+a)+abc\}+\{c^2(a+b)+abc\}$

$=a\{a(b+c)+bc\}+b\{b(c+a)+ca\}+c\{c(a+b)+ab\}$

$=a(ab+ca+bc)+b(bc+ab+ca)+c(ca+bc+ab)$

$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$

উদা. 5. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উঃ প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=a^2(b-c)-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2$

[a-এর ঘাতের অধঃক্রমানুসারে সাজাইয়া]

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

$=a^2(b-c)-a(b-c)(b+c)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$

$=(b-c)(a^2-ab-ac+bc)$

$=(b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

[$\because \ (a-c)=-(c-a)$].

প্রশ্নমালা 12A

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $8a^3+b^3+c^3-6abc$
2. $x^3-y^3+z^3+3xyz$
3. $8a^3-b^3+27c^3+18abc$
4. $a^3-b^3-c^3-3abc$
5. $a^3-27x^3-9ax-1$
6. $27x^3-8y^3-64-72xy$
7. a^6-2a^3+1
8. x^6+18x^3+1
9. x^6-14x^3-1
10. a^6+2a^3+1
11. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$
12. $(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3$
13. $8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3$
14. $(x+2y-3z)^3-x^3-8y^3+27z^3$
15. $(x-y-z)^3-x^3+y^3+z^3$
16. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$
17. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$
18. $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$

25.1. অভেদ (Identity) : যদি দুইটি বীজগণিতীয় রাশির সমতাজ্ঞাপ বিবৃতির উভয় পার্শ্ব ই উহাদের অন্তর্গত অজ্ঞাত রাশির (বা রাশিগুলির) যে কো মানেই পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ রাশিদ্বয়ের সমতাকে অভেদ (Identity) বলে যেমন, $(x+1)^2=x^2+2x+1$ একটি অভেদ ; কারণ এক্ষেত্রে x-এর পরিবর্তে যে-কোন রাশি বসাইলেই উহার উভয় পক্ষ সমান হইবে। অভেদ প্রমাণ করিতে হইলে—(i) উহার জটিলতর পক্ষকে বীজগণিতীয় প্রক্রিয়ার সাহায্যে পরিবর্তিত করিয়া অপর পক্ষের আকারে প্রকাশ করিতে হয় ;

অথবা, (ii) উহার উভয় পক্ষ জটিল হইলে প্রত্যেক পক্ষকে পৃথকভাবে সরল করিয়া একই রাশিতে পরিণত করিতে হয়। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর :

উদা. 1. প্রমাণ কর : $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

উঃ প্রদত্ত রাশির বামপক্ষ $=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

$$=a^2c^2+2acbd+b^2d^2+a^2d^2-2adbc+b^2c^2$$

$$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \quad \text{[সাজাইয়া লিখিয়া]}$$

$$=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)$$

$$=(c^2+d^2)(a^2+b^2).$$

উদা. 2. $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ হইলে দেখাও যে, $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}=2$

উঃ প্রদত্ত রাশির বামপক্ষ

$$=\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=\left(\frac{x+2a}{x-2a}-1\right)+\left(\frac{x+2b}{x-2b}-1\right)+2$$

$$=\left(\frac{x+2a-x+2a}{x-2a}\right)+\left(\frac{x+2b-x+2b}{x-2b}\right)+2$$

$$=\frac{4a}{x-2a}+\frac{4b}{x-2b}+2$$

$$=\frac{4a(x-2b)+4b(x-2a)}{(x-2a)(x-2b)}+2$$

$$=\frac{4\{a(x-2b)+b(x-2a)\}}{(x-2a)(x-2b)}+2$$

$$=\frac{4(ax-2ab+bx-2ab)}{(x-2a)(x-2b)}+2$$

4. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$ হইলে দেখাও যে, $x=y=z$.

5. $a+b=1$ হইলে দেখাও যে, $a^2+b^2=a^3+b^3+ab$.

6. $x+y=2z$ হইলে দেখাও যে, $\frac{x}{x-z}+\frac{z}{y-z}=1$.

7. $a+b+c=0$ হইলে দেখাও যে,

$a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$.

8. $\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(b+c)(b+a)}+\frac{1}{(c+a)(c+b)}=0$.

9. $(b+c)(b-c)+a(a+2b)=0$.

10. $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ac}=3$.

11. $(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

$ab+bc+ca=0$ হইলে দেখাও যে,

12. $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$.

13. $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$.

14. $\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0$.

15. $\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=3$.

16. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$ হইলে দেখাও যে,

$\frac{a^3}{b^3}+\frac{c^3}{d^3}=\frac{b^3}{a^3}+\frac{d^3}{c^3}$.

17. $x=\frac{2ab}{a+b}$ হইলে দেখাও যে, $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=2$.

18. $a+b+c+d=0$ হইলে দেখাও যে,

$a^3+b^3+c^3+d^3=3(a+b)(a+c)(a+d)$.

19. $x+y+z=0$ হইলে দেখাও যে,

$\frac{yz}{2x^2+yz}+\frac{zx}{2y^2+zx}+\frac{xy}{2z^2+xy}=1$.

$$=\frac{4\{x(a+b)-4ab\}}{(x-2a)(x-b)}+2$$

$$=\frac{4(4ab-4ab)}{(x-2a)(x-2b)}+2 \quad [\because \quad x(a+b)=4ab\ ]$$

$$=\frac{0}{(x-2a)(x-2b)}+2=2.$$

উদা. 3. $ab+bc+ca=0$ হইলে দেখাও যে

$$\frac{a^2}{a^2-bc}+\frac{b^2}{b^2-ca}+\frac{c^2}{c^2-ab}=1.$$

উঃ এখানে $ab+bc+ca=0 \quad \therefore \quad ab+bc=-ca, \quad ab+ca=-bc$ এবং $bc+ca=-ab.$

প্রদত্ত রাশির বামপক্ষ $=\frac{a^2}{a^2-bc}+\frac{b^2}{b^2-ca}+\frac{c^2}{c^2-ab}$

$$=\frac{a^2}{a^2+ab+ca}+\frac{b^2}{b^2+ab+bc}+\frac{c^2}{c^2+bc+ca}$$

$$=\frac{a^2}{a(a+b+c)}+\frac{b^2}{b(b+a+c)}+\frac{c^2}{c(c+b+a)}$$

$$=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

প্রশ্নমালা 12B

প্রমাণ কর :—

1. $(1+a^2)(1+b^2)-(a+b)^2=(1-ab)^2$
2. $a^2+2a(b+c)+(b+c)^2=c^2+2c(a+b)+(a+b)$
3. $(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

চতুর্থ অধ্যায়

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক ও লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক

(H. C. F. and L. C. M.)

অষ্টম শ্রেণীতে গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. কাহাকে বলে এবং গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. কি করিয়া নির্ণয় করিতে হয় তাহা শিখান হইয়া থাকে। পাটীগণিতেও গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় তোমরা শিখিয়াছ। পাটীগণিতে দুই বা ততোধিক পূর্ণসংখ্যার (অধিকাংশ ক্ষেত্রে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার) গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় শিখান হয়। এখানে সেই সমস্ত রাশিগুলির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. আলোচনা করা হইবে যাহাদের সহগগুলি পূর্ণসংখ্যার মধ্যে সীমাবদ্ধ। এই অধ্যায়ে অন্য কথা উল্লেখ না থাকিলে আলোচিত রাশিগুলি পূর্ণসংখ্যার সহগ যুক্ত আছে ধরিয়া লইতে হইবে।

যেমন, $2x^4-x^3+17x-9$, $6x^4y+7x^3y^2+17xy+19y^3$ রাশিদ্বয়ের সহগগুলি পূর্ণসংখ্যা।

26. সংজ্ঞা : D রাশিকে, A, B, C···(নির্দিষ্ট সংখ্যক) রাশিগুলির গ. সা. গু. বলা হইবে। যদি

(i) D রাশি, A, B, C,······রাশিগুলির প্রত্যেকটির সাধারণ উৎপাদক হয়, এবং (ii) A, B, C,······রাশিগুলির যে-কোন সাধারণ উৎপাদক, D রাশিরও সাধারণ উৎপাদক হয়।

উদা. 1. x^4-5x^2+4 এবং $x^5+2x^4-x^3-2x^2$ রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $(x+1)(x-1)(x+2)$.

কারণ, $x^4-5x^2+4=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

$$x^5+2x^4-x^3-2x^2=x^2(x+2)(x+1)(x-1).$$

এখানে $(x+1)(x-1)(x+2)$ উভয় রাশির সাধারণ উৎপাদক।

আবার প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদকগুলিও $(x+1)(x-1)(x+2)$-এর উৎপাদক। যেমন, $(x+1)$ উভয় রাশির সাধারণ উৎপাদক। আবার $(x+1)$, $(x+1)(x-1)(x+2)$-এরও উৎপাদক।

উক্ত সংজ্ঞা হইতে অতি সহজে নিম্নলিখিত বক্তব্যটি প্রমাণ করা যায়।

উপপাদ্য 1. A ও B দুইটি রাশি। যদি A রাশি B রাশির একটি উৎপাদক হয় তবে A, A এবং B রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. হইবে। যথা—

উদা. 2. $x-1$ এবং x^2-1-এর গ. সা. গু. $x-1$.

উদা. 3. x^2-2x-3 এবং x^3-2x^2-2x-3 রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

উঃ প্রথম রাশি $=x^2-2x-3$

$=x^2-3x+x-3$

$=x(x-3)+1(x-3)$

$=(x-3)(x+1)$

দ্বিতীয় রাশি $=x^3-2x^2-2x-3$

$=x^3-3x^2+x^2-3x+x-3$

$=x^2(x-3)+x(x-3)+1(x-3)$

$=(x-3)\ x^2+x+1)$

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=(x-3)$.

27. উপপাদ্য 2. A রাশিকে B রাশিদ্বারা ভাগ করিলে যদি R ভাগশেষ থাকে, তবে B ও R-এর গ. সা. গু. A ও B-এর গ. সা. গু. হইবে।

প্রমাণ। মনে কর, $A=B.C+R$ এবং ধর D রাশি B ও R-এর গ. সা. গু.; অতএব, D রাশি B ও R রাশিদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদক।

মনে কর, $B=D.\ E.$ এবং $R=D\ F.$

∴ $A=D.E.C.+D.F.=D\ EC+F)$

অতএব, D রাশি A ও B রাশিদ্বয়ের একটি সাধারণ উৎপাদক। মনে কর P, A এবং B এর একটি সাধারণ উৎপাদক। ধর $A=P.Q.$ এবং $B=P.T.$

∴ $A=B.C+R$ হইতে $P.\ Q=P\ T.C+R$ ∴ $R=P(Q-TC)$

∴ P রাশি B ও R রাশিদ্বয়ের একটি সাধারণ উৎপাদক। কিন্তু D রাশি B ও R রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু.। অতএব, P রাশি D-এরও উৎপাদক। অর্থাৎ, A এবং B-এর সাধারণ উৎপাদক, D রাশিটিরও উৎপাদক।

∴ D রাশি A এবং B রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু.।

উপপাদ্য 2-এর সাহায্যে উদাহরণ 3-এর অঙ্কটি নিম্নলিখিত ভাবে করা যায় :—

উদাহরণ : x^2-2x-3 এবং x^3-2x^2-2x-3 রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

উঃ

$$\begin{array}{r|l|l} x^2-2x-3 & x^3-2x^2-2x-3 & x \\ & x^3-2x^2-3x & \\ \hline & \qquad\qquad x-3 & \end{array}$$

উপপাদ্য 2 হইতে বলা যায় যে, x^2-2x-3 এবং $x-3$ রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. হইবে।

আবার

$$\begin{array}{r|l|l} x-3 & x^2-2x-3 & x+1 \\ & x^2-3x & \\ \hline & \qquad x-3 & \\ & \qquad x-3 & \\ \hline \end{array}$$

অর্থাৎ, x^2-2x-3-এর একটি উৎপাদক $(x-3)$.

∴ $(x-3)$ রাশি x^2-2x-3 এবং $(x-3)$ রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু.

(উপপাদ্য 1 হইতে)

অতএব, রাশিদ্বয়ের নির্ণেয় গ. সা. গু. $(x-3)$.

এখন উপরের উপপাদ্যগুলি হইতে গ. সা. গু. নির্ণয়ের নিম্নলিখিত নিয়মটি পাওয়া গেল।

নিয়ম : A ও B রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার জন্য একটি রাশিকে অপর রাশিটি দ্বারা ভাগ কর। যদি কোন ভাগশেষ থাকে, তবে উক্ত ভাগশেষকে নূতন ভাজক হিসাবে ধর এবং পূর্বের ভাজককে ভাজ্য হিসাবে ধরিয়া আবার ভাগ কর। এরূপ প্রক্রিয়া পুনঃ পুনঃ অবলম্বন করিয়া যদি ভাগশেষ শূন্য হয়, তাহা হইলে সর্বশেষ ভাজকটি A ও B-এর গ. সা. গু. হইবে।

বিঃ দ্রঃ x^2-2x-3 ও x^3-2x^2-2x-3 রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার সময় x^2-2x-3 দ্বারা প্রথমে x^3-2x^2-2x-3-কে ভাগ করিতে হইবে এরূপ কোন ধরা-বাঁধা নিয়ম নাই।

যেমন,

$$\begin{array}{l} x^3-2x^2-2x-3\,)\,x^2-2x-3\,(\,0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \\ \hline \qquad\qquad x^2-2x-3\,)\,x^3-2x^2-2x-3\,(\,x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^3-2x^2-3x \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad x-3\,)\,x^2-2x-3\,(\,x+1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^2-3x \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x-3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x-x \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x-3$.

তবে অঙ্ক কষিবার সুবিধার জন্য, অথবা পদ্ধতিকে দীর্ঘ না করিবার জন্য সাধারণতঃ রাশিদ্বয়ের মধ্যে যাহার ঘাত (degree) বড় তাহাকে অপরটির দ্বারা প্রথমে ভাগ করা হয়।

28. উপপাদ্য 3. A, B এবং C তিনটি রাশি। 1 যদি A ও C রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. হয়, তবে A ও BC রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. A ও B রাশিদ্বয়েরও গ. সা. গু. হইবে।

প্রমাণ : মনে কর, A ও BC রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. D।

প্রথমে দেখাইতে হইবে যে, A ও B রাশিদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদক D। যদি $D=1$ হয়, তবে 1, A ও B রাশিদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদক। মনে কর $D \neq 1$; এখন D রাশি A-এর উৎপাদক। কিন্তু D রাশি C রাশির উৎপাদক নয়, কারণ A ও C-এর গ. সা. গু. 1.

আবার D রাশি BC-এর উৎপাদক। অতএব, D রাশি B-এর উৎপাদক। সুতরাং D রাশি A ও B রাশিদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদক। এবার মনে কর, A ও B রাশির একটি সাধারণ উৎপাদক P ; অতএব, P রাশি A এবং BC-এরও সাধারণ উৎপাদক। সুতরাং P রাশি A ও BC-এর গ. সা. গু. D এরও উৎপাদক। দেখা গেল যে, D রাশি A ও B-এর সাধারণ উৎপাদক এবং A ও B-এর যে কোন সাধারণ উৎপাদক P, D রাশিরও উৎপাদক। অতএব, D রাশি A ও B রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু.।

29. উপপাদ্য 4. ধর, A ও B দুইটি রাশি। C রাশি যদি B এর উৎপাদক হয় অর্থাৎ $B=C.D$ হয় এবং A ও C-এর গ. সা. গু. যদি 1 হয়, তবে A ও D-এর গ. সা. গু. A ও B রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. হইবে। (প্রমাণ কর)

উদা. 4. $2x^2-x-1$ এবং $3x^3-7x^2+4$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

উঃ রাশিদ্বয়ের মধ্যে দ্বিতীয় রাশিটি উচ্চতর ঘাতবিশিষ্ট রাশি। এখানে x^3-এর সহগ 3, x^2-এর সহগ 2 দ্বারা বিভাজ্য নয়। কিন্তু $2x^2-x-1$ এবং 2-এর গ. সা. গু. 1.

$\therefore$ $2x^2-x-1$ এবং $2(3x^3-7x^2+4)$ রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $2x^2-x-1$ এবং $3x^3-7x^2+4$ রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. হইবে। (উপপাদ্য 3)

অতএব, প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার জন্য নিম্নলিখিত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$2x^2-x-1,\ 6x^3-14x^2+8$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-x-1 & 6x^3-14x^2+8\ (3x \\ & \underline{6x^3-3x^2-3x} \\ & -11x^2+3x+8 \end{array}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $2x^2-x-1$ এবং $-11x^2+3x+8$ রাশিদ্বয়ের গ সা. গু. এর সমান। (উপপাদ্য 2)

এখন, $2x^2-x-1$ এবং $-11x^2+3x+8$ রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় কর। লক্ষ্য কর 2 দ্বারা -11 বিভাজ্য নয়। কিন্তু $2x^2-x-1$ এবং 2-এর গ. সা. গু. 1, অতএব, $2x^2-x-1$ এবং $2(-11x^2+3x+8)$ রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. উক্ত রাশিদ্বয়ের গ সা. গু. এর সমান হইবে। (উপপাদ্য 3)

এখন,

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-x-1 & -22x^2+6x+16\ (-11 \\ & \underline{-22x^2+11x+11} \\ & -5x+5 \end{array}$$

অতএব $-5x+5$ এবং $2x^2-x-1$-এর গ. সা. গু. প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু.। এখানে লক্ষ্য কর -5 দ্বারা 2 বিভাজ্য নয়। আবার উপরের মত $2x^2-x-1$-কে 5 দ্বারা গুণ করিয়া উৎপাদক নির্ণয় করিলে ভুল হইবে, কারণ $-5x+5$ এবং 5-এর গ. সা. গু. 1 নয়। অতএব, নিম্নলিখিতভাবে অগ্রসর হইতে হইবে।

$$-5x+5=-5(x-1)$$

-5 এবং $2x^2-x-1$ রাশিদ্বয়ের গ সা. গু. 1.

$\therefore$ $x-1$ এবং $2x^2-x-1$ রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $-5(x-1)$ এবং $2x^2-x-1$ রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু.। (উপপাদ্য 4)

এখন

$$\begin{array}{r|l} x-1 & 2x^2-x-1\ (2x+1 \\ & \underline{2x^2-2x} \\ & x-1 \\ & \underline{x-1} \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x-1$.

অঙ্কটিকে ঐরূপ বিস্তারিতভাবে না লিখিয়া নিম্নলিখিতভাবে সাধারণতঃ লেখা হয়।

$$\begin{array}{l} 2x^2-x-1\ )\ 3x^3-7x+4 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{\qquad 2} \quad [\text{2 দ্বারা গুণ করিয়া}] \\ \qquad\qquad\qquad 6x^3-14x^2+8\ (\ 3x \\ \qquad\qquad\qquad \underline{6x^3-3x^2-3x} \\ \qquad\qquad\qquad\quad -11x^2+3x+8 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\qquad 2} \quad [\text{2 দ্বারা গুণ করিয়া}] \\ \qquad\qquad\qquad\quad -22x^2+6x+16\ (\ -11 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{-22x^2+11x+11} \\ \qquad\qquad\qquad\quad -5\ |\ \underline{-5x+5} \quad [-5\ \text{দ্বারা ভাগ করিয়া}] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x-1 \end{array}$$

$$x-1\ )\ 2x^2-x-1\ (\ 2x+1$$
$$2x^2-2x$$
$$\overline{x-1}$$
$$x-1$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x-1$.

দ্রষ্টব্য : (1) ভাগ বা গুণ করিবার সময় উপপাদ্য 3 এবং 4-এর বক্তব্যগুলি অবশ্যই মনে রাখিবে।

(2) D রাশি যদি A ও B রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. হয়, তবে $-D$ রাশিটিও উক্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. হইবে। A ও B রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে দিলে D ও $-D$-এর যে-কোন একটিকে নির্ণয় করিলে চলিবে।

পূর্বের উদাহরণটি লক্ষ্য কর। -5 দ্বারা এক স্থানে ভাগ করা হইয়াছে। -5-এর পরিবর্তে 5 দ্বারা ভাগ করিলে নিম্নলিখিত ফল পাওয়া যাইবে।

$$5\ \underline{|\ -5x+5}\qquad (\text{5 দ্বারা ভাগ করিয়া})$$
$$-x+1\ )\ 2x^2-x-1\ (\ -2x-1$$
$$2x^2-2x$$
$$\overline{x-1}$$
$$x-1$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= -x+1 = -(x-1)$.

উদা. 5. $2x^2+18x+28$ এবং $x^3+10x^2+24x+16$ রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় কর। [C. U. 1938]

উঃ $2\ \underline{|\ 2x^2+18x+28}$ (2 দ্বারা ভাগ করিয়া)

$$x^2+9x+14\ )\ x^3+10x^2+24x+16\ (\ x+1$$
$$x^3+9x^2+14x$$
$$\overline{x^2+10x+16}$$
$$x^2+9x+14$$
$$x+2\ )\ x^2+9x+14\ (\ x+7$$
$$x^2+2x$$
$$\overline{7x+14}$$
$$7x+14$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x+2$

উদা. 6. $2x^3-4x^2-6x$ এবং $3x^5-6x^4-6x^3-9x^2$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

উঃ $2\ \underline{|\ 2x^3-4x^2-6x}$ [2 দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$x^3-2x^2-3x\ )\ 3x^5-6x^4-6x^3-9x^2\ (\ 3x^2+3$$
$$3x^5-6x^4-9x^3$$
$$\overline{3x^3-9x^2}$$
$$3x^3-6x^2-9x$$
$$-3\ \underline{|\ -3x^2+9x}\ [-3 \text{ দ্বারা ভাগ করিয়া}]$$
$$x^2-3x\ )\ x^3-2x^2-3x\ (\ x+1$$
$$x^3-3x^2$$
$$\overline{x^2-3x}$$
$$x^2-3x$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x^2-3x$.

দ্রষ্টব্য : (1) $2x^3-4x^2-6x$ রাশিটি $2x$ দ্বারা বিভাজ্য। কিন্তু উক্ত অঙ্ক কষিবার সময় শুধু 2 দ্বারা $2x^3-4x^2-6x$-কে ভাগ করা হইয়াছে। $2x$ দ্বারা ভাগ করিলে অঙ্কটি ভুল হইত। কারণ $2x$ এবং $3x^5-6x^4-6x^3-9x^2$-এর গ. সা. গু. 1 নয়। কিন্তু 2 এবং $3x^5-6x^4-6x^3-9x^2$-এর গ. সা. গু. 1. লক্ষ্য কর, একই কারণে $-3x^2+9x$-কে শুধু -3 দ্বারা ভাগ করা হইয়াছে।

(2) ধর, $ax+b$ এবং $cx+d$ দুইটি রাশি যাহাদের প্রত্যেকটির ঘাত 1 ; ইহাদের একটি অপরটির দ্বারা বিভাজ্য না হইলে ইহাদের গ. সা. গু. 1 হইবে। যেমন, $x-2$ এবং $2x-3$ রাশিদ্বয় একটি অপরটির দ্বারা বিভাজ্য নয় ; অতএব ইহাদের গ. সা. গু. 1.

উদা. 7. যদি $x+k$, x^2+px+q এবং x^2+lx+m-এর গ. সা. গু. হয়, তবে প্রমাণ কর যে $(l-p)k=m-q$.

উঃ $x+k$ প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু.। অতএব $x+k$ রাশিদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদক। ধর, $x^2+px+q=(x+k)\,\mathrm{A}$ এবং $x^2+lx+m=(x+k)\mathrm{B}$.

এখন $x=-k$ বসাইলে

$(-k)^2+p(-k)+q=(-k+k).\ \mathrm{A}$ এবং $(-k)^2+l(-k)+m=(-k+k)\mathrm{B}$

অর্থাৎ $k^2-pk+q=0$ এবং $k^2-lk+m=0$.

$\therefore\ k^2=pk-q$ এবং $k^2=lk-m$; $\therefore\ pk-q=lk-m$

বা, $m-q=lk-pk$ বা, $m-q=(l-p)k$

$\therefore\ (l-p)k=m-q$.

30. দুইটির অধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় :

উপপাদ্য 5. A, B, C রাশিত্রয়ের মধ্যে A এবং B-এর গ. সা. গু. P হইলে এবং P ও C রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. Q হইলে A, B এবং C রাশিত্রয়ের গ. সা. গু. Q হইবে।

প্রমাণ। মনে কর, $\mathrm{A=P.D}$ এবং $\mathrm{B=P.E}$; দেওয়া আছে P ও C রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. Q।

অতএব ধর, $\mathrm{P=Q\,G}$ এবং $\mathrm{C=Q.H}$.

$\therefore\ \mathrm{A=Q.G.D},\quad \mathrm{B=Q.G.E},\quad \mathrm{C=Q.H}.$

অতএব Q রাশি A, B এবং C রাশিত্রয়ের একটি সাধারণ উৎপাদক।

মনে কর, R রাশিত্রয়ের একটি সাধারণ উৎপাদক।

$\therefore$ R, A ও B রাশিদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদক। কিন্তু A ও B রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. P ; অতএব R রাশি P-এর উৎপাদক। $\therefore$ R, P এবং C-এর সাধারণ উৎপাদক। কিন্তু P এবং C-এর গ. সা. গু. Q ; অতএব R রাশি Q-এরও উৎপাদক। অতএব দেখা গেল যে Q রাশি A, B এবং C রাশিত্রয়ের সাধারণ উৎপাদক এবং

উক্ত রাশিত্রয়ের যে-কোন সাধারণ উৎপাদক R, Q রাশিটিরও উৎপাদক। অতএব Q রাশি, A, B এবং C রাশিত্রয়ের গ. সা. গু.।

উদা. 8. $x^5+x^4-4x^3+2x^2+6x-9$, x^4-x^2+6x-9 এবং $x^4+2x^3-5x^2-6x+9$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

উঃ প্রথম রাশিমালা $=x^5+x^4-4x^3+2x^2+6x-9$

দ্বিতীয় রাশিমালা $=x^4-x^2+6x-9$

তৃতীয় রাশিমালা $=x^4+2x^3-5x^2-6x+9$

প্রথমে দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিমালাকে যথাক্রমে ভাজক ও ভাজ্য ধরিয়া উহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করা হইল।

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-x^2+6x-9 & x^4+2x^3-5x^2-6x+9\,(1 \\
 & \underline{x^4 \qquad\quad -x^2+6x-9} \\
2 & 2x^3-4x^2-12x+18 \\
\hline
x^3-2x^2-6x+9 & x^4 \qquad\quad -x^2+6x-9\,(x+2 \\
 & \underline{x^4-2x^3-6x^2+9x} \\
 & 2x^3+5x^2-3x-9 \\
 & \underline{2x^3-4x^2-12x+18} \\
9 & 9x^2+9x-27 \\
 & x^2+x-3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+x-3 & x^3-2x^2-6x+9\,(x-3 \\
 & \underline{x^3+x^2-3x} \\
 & -3x^2-3x+9 \\
 & \underline{-3x^2-3x+9}
\end{array}
$$

∴ দ্বিতীয় এবং তৃতীয় রাশিমালার গ. সা. গু. $=x^2+x-3$;

এখন (x^2+x-3) এবং প্রথম রাশিমালাটির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+x-3 & x^5+x^4-4x^3+2x^2+6x-9\,(x^3-x+3 \\
 & \underline{x^5+x^4-3x^3} \\
 & -x^3+2x^2+6x-9 \\
 & \underline{-x^3-x^2+3x} \\
 & 3x^2+3x-9 \\
 & \underline{3x^2+3x-9}
\end{array}
$$

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^2+x-3$.

মন্তব্য : দুইটির অধিক রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার সময় সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র মাত্রাবিশিষ্ট রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. প্রথমে নির্ণয় করিয়া অগ্রসর হইলে অঙ্ক কষিতে সুবিধা হয়।

প্রশ্নমালা 13

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $3ab-6b^2$, $12a^3-48ab^2$ এবং $6a^3-6a^2b-12ab^2$
2. x^2-9, $(x+3)^2$ এবং x^2+x-6
3. $x^2+7x+12$, x^2+6x+8 এবং $x^2+12x+32$
4. $6a^2+xy-15y^2$ এবং $21x^2+41xy+10y^2$ [C. U. '47]
5. $(x-2)(2x^2-7x+6)+(x-2)(2x-3)$ এবং $(x-1)(2x^2-7x+6)-(x-1)(2x-3)$
6. x^2-2x-3 এবং x^3-2x^2-2x-3
7. $3x^2-11x-4$ এবং $6x^3-25x^2+3$
8. $x^3-x^2-8x+12$ এবং $3x^2-2x-8$
9. $x^2+9x+14$ এবং $x^3+10x^2+31x+30$ [S. F. '53]
10. x^3-3x^2+x-3 এবং x^4+6x^2+5 [S. F. '68]
11. $4(x^2-7x+12)$, $8(x^3-27)$ এবং $12(x^2+3x-18)$
12. x^3+x^2+x+1 এবং x^3+3x^2+3x+1
13. x^3+2x^2-x-2 এবং x^3+x^2-4x-4
14. $x^3+6x^2+2x-15$ এবং $x^3+5x^2-2x-10$
15. $15x^3-4x^2-53x+30$ এবং $15x^3-x^2-31x-15$
16. $4x^3-x^2-4x+1$ এবং $3x^3-3x^2+x-1$
17. $2x^4+11x^3-13x^2-99x-45$ এবং $2x^3-7x^2-46x-21$
18. x^3+5x^2+7x+3 এবং $x^4+3x^3+4x^2+3x+1$
19. $x^4-3x^3+2x^2+x-1$ এবং x^3-x^2-2x+2
20. $x^4-3x^3-2x^2+12x-8$ এবং x^3-7x+6
21. $3x^4+15x^3+5x^2+10x+2$ এবং $2x^4+9x^3+4x+3$
22. $x^5-2x^4-2x^3+8x^2-7x+2$ এবং x^4-4x+3
23. $6x^4+7x^3+5x^2+2x$ এবং $4x^5-18x^4-8x^3-10x^2$
24. $27x^4+x$, $87x^2+8x-7$ এবং $27x^3+27x^2+9x+1$
25. $3x^5-5x^3+2$ এবং $2x^5-5x^2+3$ [D. B. '51]
26. x^3-1 এবং x^5-1 [C. U. '46]
27. x^5-x^2-4x+2 এবং $x^5+3x^4-x^3-7x^2-5x-1$ [C. U. '42]
28. a^3-1 এবং a^7-1 [D. B. '41]
29. x^3+1, $x^4-x^3+2x^2-x+1$ এবং $2x^3+x^2-x+3$
30. যদি x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $(x+a)$ হয়, তবে দেখাও যে $a(p-p')=q-q'$. [C. U. '41]

31. m-এর মান কি হইলে $x^3-(m-6)x^2-2mx+24$ এবং $x^3-(m+3)x^2-(2m-45)x-30$ রাশিদ্বয়ের একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকিবে? সাধারণ গুণনীয়কটি কি হইবে?

31. লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক :

সংজ্ঞা : P রাশিকে A, B, C···(নির্দিষ্ট সংখ্যক) রাশিগুলির ল. সা. গু. বলা হইবে যদি (1) A, B, C······প্রত্যেকে P রাশির উৎপাদক হয়,

এবং (2) A, B, C······ প্রত্যেকে যদি কোন রাশি Q-এর উৎপাদক হয়, তবে P রাশিটিও Q রাশির উৎপাদক হইবে।

যথা, x^2+2x এবং x^2+3x+2-এর ল. সা. গু. $x(x+1)(x+2)$

এখানে $x^2+2x=x(x+2)$, $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

লক্ষ্য কর x^2+2x এবং x^2+3x+2 প্রত্যেকে $x(x+1)(x+2)$-এর উৎপাদক। x^2+2x এবং x^2+3x+2 প্রত্যেকে যদি কোন একটি রাশি Q-এর উৎপাদক হয় তবে Q রাশিটি $x(x+1)$ এবং $(x+1)(x+2)$ প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য হইবে। অর্থাৎ x, $x+1$, $x+2$ প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

$\therefore$ Q রাশিটি $x(x+1)(x+2)$ দ্বারাও বিভাজ্য হইবে।

অতএব $x(x+1)(x+2)$, Q-এরও উৎপাদক।

$\therefore$ $x(x+1)(x+2)$ নির্ণেয় ল. সা. গু.।

সহজেই উৎপাদক নির্ণয় করা যায় এরূপ রাশিসমূহের ল. সা. গু. নির্ণয়ের প্রকরণ অষ্টম শ্রেণীতে শিখান হয়। এখানে গ. সা. গু.-এর সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী নিম্নে দেখান হইল।

32. গ. সা. গু-র সাহায্যে দুইটি রাশির ল. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী :

মনে কর, A ও B রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. H ; এখন যদি A = P.H এবং B = Q.H হয়, তবে P এবং Q-এর গ. সা. গু. 1 হইবে। সুতরাং P.Q.H প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের ল. সা. গু. হইবে। মনে কর L = P.Q.H.

$$\therefore \quad L=\frac{PH\times QH}{H}=\frac{A\times B}{H}. \quad \therefore \quad L=\frac{A}{H}\times B \text{ এবং } L=\frac{B}{H}\times A.$$

সুতরাং প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের একটিকে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে অপর রাশিটির সহিত গুণ করিলে যে গুণফল হইবে তাহা রাশিদ্বয়ের ল. সা. গু হইবে।

মন্তব্য : যেহেতু $L=\dfrac{A\times B}{H}$ $\therefore$ $L\times H=A\times B$।

$\therefore$ রাশিদ্বয়ের গুণফল = রাশিদ্বয়ের ল. সা. গু. × রাশিদ্বয়ের গ. সা গু.।

উদা 1. $6x^2-13ax+6a^2$, $6a^2+11ax-10a^2$ এবং $6x^2+2ax-4a^2$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

উঃ প্রথম রাশি $=6x^2-13ax+6a^2=6x^2-9ax-4ax+6a^2$

$=3x(2x-3a)-2a(2x-3a)=(2x-3a)(3x-2a)$

দ্বিতীয় রাশি $=6x^2+11ax-10a^2=6x^2+15ax-4ax-10a^2$

$=3x(2x+5a)-2a(2x+5a)=(2x+5a)(3x-2a)$

তৃতীয় রাশি $=6x^2+2ax-4a^2=2(3x^2+ax-2a^2)$

$=2\{3x^2+3ax-2ax-2a^2\}$

$=2\{3x(x+a)-2a(x+a)\}=2(x+a)(3x-2a)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=2(x+a)(2x-3a)(3x-2a)(2x+5a)$.

উদা. 2. x^3+2x^2-x-2 এবং $2x^4-x^3-9x^2+4x+4$-এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

উঃ প্রথমে প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় করা হইল।

$$
\begin{array}{l}
x^3+2x^2-x-2)\,2x^4-x^3-9x^2+4x+4\,(2x-5 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{2x^4+4x^3-2x^2-4x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -5x^3-7x^2+8x+4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-5x^3-10x^2+5x+10} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 3\,|\,\underline{3x^2+3x-6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2+x-2)\,x^3+2x^2-x-2\,(x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^3+x^2-2x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^2+x-2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{x^2+x-2}
\end{array}
$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $=x^2+x-2$.

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}\times(2x^4-x^3-9x^2+4x+4)$

$=(x+1)(2x^4-x^3-9x^2+4x+4)$

$=2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4$.

উদা. 3. $x^2-5x-14$ একটি প্রদত্ত রাশি। অপর একটি রাশি এরূপভাবে নির্ণয় কর যাহাতে $x^2-5x-14$ এবং নির্ণেয় রাশিটির গ. সা. গু. $x-7$ এবং ল. সা. গু. $x^3-10x^2+11x+70$ হয়।

উঃ মনে কর, নির্ণেয় রাশি P.

এখন রাশিদ্বয়ের গুণফল $=$ ল. সা. গু. $\times$ গ. সা. গু.।

$\therefore\ P\times(x^2-5x-14)=(x^3-10x^2+11x+70)\times(x-7)$

$\therefore\ P=\dfrac{(x^3-10x^2+11x+70)\times(x-7)}{x^2-5x-14}$

$=(x-5)(x-7)=x^2-12x+35$

$\therefore$ নির্ণেয় রাশি $=x^2-12x+35$.

উদা. 4. দুইটি দ্বিঘাত রাশির গ. সা. গু. $x+3$ এবং ল. সা. গু. x^3+2x^2-5x-6 হইলে, রাশি দুইটি নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, রাশিদ্বয় P এবং Q। এখন $(x+3)$, P ও Q এর গ. সা. গু.। অতএব, $x+3$, P এবং Q-এর সাধারণ উৎপাদক। ধর, $P=(x+3).A$ এবং $Q=(x+3).B$

এখানে A ও B পরস্পর বিভাজ্য নয়।

এখন $PQ=(x+3)(x^3+2x^2-5x-6)$

$(x+3)A.(x+3)B=(x+3)\{x^2(x+3)-x(x+3)-2(x+3)\}$

$\therefore\ (x+3)A(x+3)B=(x+3)(x+3)(x^2-x-2)$

$\therefore\ AB=x^2-x-2$

বা, $AB=x^2-2x+x-2$ বা, $AB=(x-2)(x+1)$

$AB=(x-2)(x+1)=(-x+2)(-x-1)$,

যেহেতু P রাশিটি দ্বিঘাত রাশি ;

অতএব, A রাশিটি $x-2$, $x+1$, $-x+2$, $-x-1$-এর যে-কোন একটি হইতে পারে।

যখন $A=x-2$ তখন $B=x+1$

,, $A=x+1$,, $B=x-2$

,, $A=-x+2$,, $B=-x-1$

,, $A=-x-1$,, $B=-x+2$

অতএব, নির্ণেয় রাশিদ্বয় $(x+3)(x-2)$ এবং $(x+3)(x+1)$

অথবা $(x+3)(-x+2)$ এবং $(x+3)(-x-1)$.

মন্তব্য ঃ অঙ্কটিতে যদি বলা হইত—এমন দুইটি দ্বিঘাত রাশি নির্ণয় কর যাহাদের গ. সা. গু. $x+3$ এবং ল. সা. গু. x^3+2x^2-5x-6, তাহা হইলে যে-কোন এক জোড়া উত্তর নির্ণয় করিলে চলিত, সেক্ষেত্রে $A.B=(x-2)(x+1)$ লিখিয়া অঙ্কের উত্তর নির্ণয় করা যাইত।

অর্থাৎ তখন A, $x-2$ এবং $x+1$-এর যে কোন একটি হইতে পারে।

$\therefore$ A যখন $x-2$ তখন $B=x+1$ এবং A যখন $x+1$ তখন $B=x-2$.

অতএব নির্ণেয় রাশি $(x+3)(x-2)$ এবং $(x+3)(x+1)$.

33. তিন বা ততোধিক রাশির ল. সা. গু. নির্ণয়।

তিন বা ততোধিক রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে উহাদের যে-কোন দুইটির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে। অতঃপর লব্ধ ল. সা. গু.-টি এবং অবশিষ্ট রাশির একটিকে লইয়া পুনরায় ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে; যতক্ষণ পর্যন্ত না অবশিষ্ট রাশিগুলি নিঃশেষ হইবে ততক্ষণ পর্যন্ত ঐরূপ প্রক্রিয়ার পুনরাবৃত্ত করিতে হইবে। সর্বশেষে যে ল. সা. গু.-টি পাওয়া যাইবে তাহাই প্রদত্ত রাশিগুলির নির্ণেয় ল. সা. গু.।

উপপাদ্য ঃ x ও y রাশিদ্বয়ের ল. সা. গু. l এবং l ও z রাশিদ্বয়ের ল. সা. গু. l' হইলে l', x, y ও z-এর ল. সা. গু. হইবে।

প্রমাণ ঃ [নিজে কর।]

উদা. 5. $x^2-12x+35$, x^2-8x+7 এবং x^3-5x^2-x+5 এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

উঃ এখানে $x^2-12x+35$ এবং x^2-8x+7 রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $(x-7)$

$\therefore$ উহাদের ল. সা. গু. $=\dfrac{(x^2-12x+35)(x^2-8x+7)}{(x-7)}$

$$=(x-5)(x^2-8x+7)=x^3-13x^2+47x-35.$$

আবার, $x^3-13x^2+47x-35$ ও x^3-5x^2-x+5 রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $=x^2-6x+5.$

$\therefore$ উহাদের ল. সা. গু. $=\dfrac{(x^3-13x^2+47x-35)(x^3-5x^2-x+5)}{x^2-6x+5}$

$$=(x-7)(x^3-5x^2-x+5)$$
$$=x^4-12x^3+34x^2+12x-35.$$

$\therefore$ নির্ণেয় ল সা. গু. $=x^4-12x^3+34x^2+12x-35.$

প্রশ্নমালা 14

নিম্নের রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর ঃ

1. $x^2-(a-c)x-ac$ এবং $x^2-(a+c)x+ac$
2. x^2-4, x^2-x-2 এবং x^2+x-2
3. a^2-9b^2, $a^2-ab-6b^2$ এবং $a^2+ab-12b^2$ [Cal. '11]
4. $1+a$, $1-a^2$ এবং $1-2a+a^2$
5. $6x^2-x-1$, $3x^2+7x+2$ এবং $2x^2+3x-2$ [S. F. '70]
6. x^2-x-6, x^2+x-12 এবং x^2+6x+8
7. x^2-3x+2, x^2-4x+3 এবং x^2-5x+6
8. $2x^2-x-1$, $2x^2+3x+1$ এবং x^2-1
9. a^3-1, a^4-1 এবং a^4+a^2+1 [S. F. '58]
10. $3x^2+5x+2$, $9x^2-4$, $3x^2+x-2$
11. $2x^2-x-6$, $2x^2-7x-15$ এবং $x^2-7x+10$
12. $3ab-6b^2$, $12a^3-48ab^2$ এবং $6a^3-6a^2b-12ab^2$
13. $8a^3-27b^3$, $3a^2-ab-2b^2$ এবং $6a^2-5ab-6b^2$
14. $27x^4+x$, $87x^2+8x-7$ এবং $27x^3+27x^2+9x+1$
15. a^2-3a+2, $(a-1)^2$ এবং a^4-1 [C. U. '38]

16. $3x^2-15x+18$, $2x^2+2x-24$ এবং $4x^2+36x+80$ [S. F. '59]

17. $x^2-7x+12$, $3x^2-6x-9$ এবং $2x^3-6x^2-8x$

18. $a^2-b^2-c^2+2bc$, $(a+b-c)^2$ এবং $a^2-b^2+c^2+2ac$

19. $15(x^3-y^3)$, $5(x^2-xy+y^2)$, $4(x^2+xy+y^2)$ এবং $6(x^2-y^2)$

20. (x^3+a^3), (x^3-a^3) এবং $(x^4+x^2a^2+a^4)$

21. $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$ এবং $6x^2-5x-6$

22. x^3-3x+2, x^3+2x^2-3x এবং x^3-4x [S. F. '62]

23. x^3+2x^2-x-2 এবং x^3+x^2-4x-4

24. x^3-2x+1 এবং x^3+2x^2-1 [Dac. '30]

25. x^3-x^2-2x+2 এবং x^3+4x^2+x-6

26. $3x^3+x^2-8x+4$ এবং $3x^3+7x^2-4$ [Pat. '25]

27. $4x^3-x^2-4x+1$ এবং $3x^3-3x^2+x-1$ [Mad. '24]

28. x^3-4x^2+5x-2, x^3-7x+6 এবং x^3-3x-2 [Bom. '24]

29. $4x^2+8x-12$, $9x^2-9x-54$ এবং $6x^4-30x^2+24$

30. দুইটি দ্বিঘাত রাশির গ. সা. গু. $2x-5$ এবং ল. সা. গু. $2x^3+3x^2-14x-15$; উহাদের একটি $2x^2+x-15$ হইলে অপরটি কত ?

31. এক জোড়া দ্বিঘাত রাশি নির্ণয় কর যাহাদের গ. সা. গু. $(x+3)$ এবং ল. সা. গু. x^3-7x+6. [Raj. '28]

32. এক জোড়া দ্বিঘাত রাশি নির্ণয় কর যাহাদের গ. সা. গু. $5x-4$ এবং ল. সা. গু. $(2x-5)(15x^2-32x+16)$.

33. এরূপ দুইটি রাশি নির্ণয় কর যাহাদের গ. সা. গু. $5x^2+6x+1$ এবং ল. সা. গু. $5x^5-9x^4-17x^3+7x^2+12x+2$ [Bom. '22]

34. x এবং y রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. যথাক্রমে h এবং l ; যদি $h+l=x+y$ হয় তবে দেখাও যে, $x^3+y^3=h^3+l^3$.

পঞ্চম অধ্যায়

সরল সমীকরণ (Simple Equation)

34. **সমীকরণ** (Equation) : দুইটি বীজগণিতীয় রাশির সমতাজ্ঞাপক বিবৃতিকে **সমীকরণ** (Equation) বলা হয়। সমীকরণস্থিত যে প্রতীকের (বা প্রতীকগুলির) মানদ্বারা সমীকরণের উভয় পার্শ্বের মানের সমতা সাধিত হয় তাহাকে (বা তাহাদের) উক্ত সমীকরণের **অজ্ঞাত রাশি** (unknown quantity) বলা হয়। সাধারণতঃ $x, y, z \cdots\cdots$এর যে কোন একটি দ্বারা অজ্ঞাত রাশি সূচিত হয়। অজ্ঞাত রাশির যে মান বা মানগুলির দ্বারা সমীকরণটির সমান চিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থ রাশিদ্বয়ের মান সমান হয় তাহাকে (বা তাহাদের) সমীকরণটির বীজ (root) বলা হয়। মনে কর, $(3x+8)$ এবং $(3-2x)$ বীজগণিতীয় রাশিদ্বয় পরস্পর সমান। উক্ত রাশিদ্বয়ের সমতাজ্ঞাপক বিবৃতি $3x+8=3-2x$; অতএব, এই সমগ্র বিবৃতিটিকে একটি সমীকরণ এবং x-কে উক্ত সমীকরণের অজ্ঞাত রাশি বলা হইবে। যদি সমীকরণটিতে x-এর পরিবর্তে -1 বসান হয়, তবে সমীকরণটির উভয় পক্ষ সমান হইবে। অতএব, -1 উক্ত সমীকরণের বীজ।

যে প্রক্রিয়ার দ্বারা সমীকরণের বীজ নির্ণয় করা হয় তাহাকে **সমাধান** (solve) বলা হয়।

যদি সমীকরণের অজ্ঞাত রাশির (বা রাশিগুলির) যে-কোন মানেই সমীকরণটির উভয় পক্ষ সমান হয়, তবে সমীকরণটিকে **অভেদ সমীকরণ** বা **অভেদ** (Identity) বলা হইবে। যথা, $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ সমীকরণের x-এর স্থানে যে-কোন মান বসাইলে উহার উভয় পক্ষ সমান হইবে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে অজ্ঞাত রাশিটির অসংখ্য মান বর্তমান। অতএব, উহা একটি অভেদ।

একই অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দুইটি বিভিন্ন সমীকরণের যদি একই বীজ থাকে, তবে উহাদের **তুল্য সমীকরণ** (Equivalent Equations) বলা হয় ; যথা, $5x+2=7$ এবং $4x-3=1$ সমীকরণদ্বয়ের উভয়েই অজ্ঞাত রাশি x এবং উহাদের সাধারণ বীজ 1 ; অতএব, উহারা তুল্য সমীকরণ।

35. **সরল সমীকরণ** (Simple Equation) : x অজ্ঞাতরাশি-বিশিষ্ট একটি সমীকরণকে সরলীকরণের পর যদি উহাকে $ax+b=0$. ($a \neq 0$ এবং a, b দুইটি বাস্তব রাশি) আকারে প্রকাশ করা যায়, তবে প্রদত্ত সমীকরণটিকে x-এর **সরল সমীকরণ** (Simple Equation) বলা হইবে।

যথা, $\dfrac{6x+1}{15}-\dfrac{2x-4}{7x-16}=\dfrac{2x-1}{5}$ একটি প্রদত্ত সমীকরণ। এই সমীকরণে x অজ্ঞাত রাশি। সরলীকরণের পর সমীকরণটিকে $2x+4=0$ আকারে প্রকাশ করা যায়। অতএব, প্রদত্ত সমীকরণটি একটি সরল সমীকরণ।

আবার, $x^2+9x+2=(x-1)(x+7)$ সমীকরণটি x-অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট একটি প্রদত্ত সমীকরণ। সরলীকরণের পর সমীকরণটিকে $3x+9=0$ রূপে প্রকাশ করা যায়। অতএব, প্রদত্ত সমীকরণটিও একটি সরল সমীকরণ।

কিন্তু, $(x+1)^2=x^2+2x+5$ সমীকরণটি একটি সরল সমীকরণ নয়।

কারণ, $(x+1)^2=x^2+2x+5$ বা, $x^2+2x+1=x^2+2x+5$

বা, $2x+1=2x+5$. বা, $0.x-4=0$.

শেষোক্ত উদাহরণটি হইতে ইহা স্পষ্ট যে, $ax+b=0$ সরল সমীকরণের ক্ষেত্রে a-এর মান কখনই শূন্য হইবে না। অতএব, কোন সরল সমীকরণ $ax=0$ আকারের হইলে, x-এর মান অবশ্যই শূন্য হইবে।

এই অধ্যায়ে x-এর সরল সমীকরণের সমাধানের বিভিন্ন প্রণালী আলোচনা করা হইয়াছে। অন্য কিছু উল্লেখ করা না থাকিলে সরল সমীকরণ বলিতে x-এর সরল সমীকরণকে বুঝিতে হইবে।

উপপাদ্য : $ax+b=0$ সরল সমীকরণটির একটিমাত্র বীজ আছে।

প্রমাণ : যেহেতু $ax+b=0$ একটি সরল সমীকরণ, অতএব $a\neq 0$.

এখন, $a\left(-\dfrac{b}{a}\right)+b=-b+b=0$. $\therefore \left(-\dfrac{b}{a}\right)$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

এখন যদি $ax+b=0$ সমীকরণের একাধিক বীজ থাকা সম্ভব হয় তবে মনে কর k ও l উক্ত সমীকরণের দুইটি বীজ।

$\therefore \quad ak+b=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

এবং $al+b=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

এখন, $\{(1)-(2)\}$ করিয়া

$a(k-l)=0$; এখানে a শূন্য নয়।

অতএব, $k-l=0$ বা, $k=l$

অতএব, সমীকরণটির মাত্র একটি বীজ আছে।

36. সাধারণ সরল সমীকরণ।

ভগ্নাংশযুক্ত সমীকরণ : ভগ্নাংশযুক্ত সমীকরণের সমাধান করিতে হইলে উহার উভয় পক্ষকে সমীকরণের উভয় পক্ষের হরগুলির ল. সা. গু. দ্বারা গুণ করিয়া লইতে হইবে ; যথা,

উদা. 1. সমাধান কর :

$$\tfrac{1}{4}(3x+20)-\tfrac{1}{15}(7x+47)=\tfrac{1}{5}\left(6+\frac{x+7}{3}\right)$$

উঃ প্রদত্ত সমীকরণটির উভয় পক্ষকে 4, 15 এবং 5-এর ল. সা. গু. 60 দ্বারা গুণ করা হইল।

$$\therefore \quad 15(3x+20)-4(7x+47)=12\left(6+\frac{x+7}{3}\right)$$

বা, $45x+300-28x-188=72+4x+28$

বা, $45x-28x-4x=72+28-300+188$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $13x=-12$ $\therefore$ $x=-\frac{12}{13}$.

দশমিক-বিশিষ্ট সমীকরণ :

উদা. 2. সমাধান কর : $\frac{x}{0.5}-\frac{1}{0.05}+\frac{x}{0.005}-\frac{1}{0.0005}=0$

উঃ $\frac{x}{(\frac{5}{10})}-\frac{1}{(\frac{5}{100})}+\frac{x}{(\frac{5}{1000})}-\frac{1}{(\frac{5}{10000})}=0$

বা, $\frac{x}{(\frac{1}{2})}-\frac{1}{(\frac{1}{20})}+\frac{x}{(\frac{1}{200})}-\frac{1}{(\frac{1}{2000})}=0$

বা, $2x-20+200x-2000=x$

বা, $202x=2020$ $\therefore$ $x=\frac{2020}{202}=10$.

দ্রষ্টব্য : দশমিক ভগ্নাংশযুক্ত সমীকরণের সমাধান করিবার সময় দশমিকগুলিকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া লইয়া উহাকে ভগ্নাংশীয় সমীকরণ প্রণালীতে সমাধান করিলে সমাধান-প্রণালী সহজ হয়।

আক্ষরিক সমীকরণ :

উদা. 3. সমাধান কর : $bx-\frac{2ab}{a-b}=(a+b)x+a.$

উঃ $bx-\frac{2ab}{a-b}=(a+b)x+a$

বা, $bx-(a+b)x=a+\frac{2ab}{a-b}$ **[পক্ষান্তর করিয়া]**

বা, $(b-a-b)x=\frac{a^2-ab+2ab}{a-b}$

বা, $-ax=\frac{a^2+ab}{a-b}$ ... ... (1)

এখন প্রদত্ত সমীকরণটি x-এর একটি সরল সমীকরণ ; অতএব $a \neq 0$.

$\therefore$ (1) হইতে $x=\frac{a^2+ab}{-a(a-b)}=\frac{a(a+b)}{-a(a-b)}=\frac{a+b}{-(a-b)}=\frac{a+b}{b-a}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=\frac{a+b}{b-a}$.

উদা. 4. সমাধান কর : $\frac{x+a}{b+c}+\frac{x+b}{c+a}+\frac{x+c}{a+b}+3=0$ [S. F. '70]

উঃ $\frac{x+a}{b+c}+\frac{x+b}{c+a}+\frac{x+c}{a+b}+(1+1+1)=0$

বা, $\left(\frac{x+a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{x+b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{x+c}{a+b}+1\right)=0$

বা, $\frac{x+a+b+c}{b+c}+\frac{x+b+c+a}{c+a}+\frac{x+c+a+b}{a+b}=0$

বা, $(x+a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=0$

মনে কর, $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=p$; $\therefore$ $p(x+a+b+c)=0$,

বা, $px+p(a+b+c)=0$; [ইহা একটি সরল সমীকরণ বলিয়া $p\neq 0$.]

বা, $px=-p(a+b+c)$ $\therefore$ $x=-(a+b+c)$.

37. বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে সমাধান :

উদা. 5. সমাধান কর : $\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+3a}{x+a+b}$

উঃ $\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+3a}{x+a+b}$

বা, $(x+a)(x+a+b)=(x+3a)(x+b)$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $x^2+ax+bx+ax+a^2+ab=x^2+bx+3ax+3ab$

বা, $x^2+2ax+bx-x^2-bx-3ax=3ab-a^2-ab$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $-ax=2ab-a^2$; [ইহা x-এর সরল সমীকরণ বলিয়া $-a\neq 0$.]

$\therefore$ $x=\frac{2ab-a^2}{-a}=\frac{-a(a-2b)}{-a}=a-2b$.

38. পক্ষান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমাধান।

সমীকরণস্থিত রাশিগুলিকে পক্ষান্তর ক্রিয়ার দ্বারা সুবিধামত সজ্জবদ্ধ করিয়া লইয়া সমীকরণের সমাধান করা যায়। যেমন,

উদা. 6. সমাধান কর : $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-16}=\frac{2x-1}{5}$

উঃ $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-16}=\frac{2x-1}{5}$

বা, $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-1}{5}=\frac{2x-4}{7x-16}$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $\frac{6x+1-3(2x-1)}{15}=\frac{2x-4}{7x-16}$ বা, $\frac{4}{15}=\frac{2x-4}{7x-16}$

বা, $28x-64=30x-60$ বা, $-2x=4$ $\therefore$ $x=-2$.

উদা. 7. সমাধান কর : $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$ [S. F. '70]

উঃ $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-3}$

বা, $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3}=\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x-2}$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $\frac{x-3-x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{2x-4-2x+6}{(x-3)(x-2)}$

বা, $\frac{-2}{(x-1)(x-3)}=\frac{2}{(x-3)(x-2)}$

বা, $\frac{-2}{x-1}=\frac{2}{x-2}$ [উভয় পক্ষকে $(x-3)$ দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $\frac{-1}{x-1}=\frac{1}{x-2}$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $-(x-2)=x-1$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $-x+2=x-1$ বা, $-2x=-3$ $\therefore$ $x=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

39. ভাগ দ্বারা সরলীকরণ করিয়া সমাধান।

ভগ্নাংশ-বিশিষ্ট সমীকরণে ভগ্নাংশগুলির লবের মাত্রা যদি হরের মাত্রা অপেক্ষা কম না হয় তবে হরের সাহায্যে লবকে ভাগ করিয়া লইলে সমাধান প্রক্রিয়া সহজ হইয়া পড়ে। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদা. 8. সমাধান কর : $\frac{x-2}{x-3}+\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-4}{x-5}$ [S. F. '64]

উঃ এখানে, $\frac{(x-3)+1}{x-3}+\frac{(x-4)+1}{x-4}=\frac{(x-2)+1}{x-2}+\frac{(x-5)+1}{x-5}$

বা, $\left(\frac{x-3}{x-3}+\frac{1}{x-3}\right)+\left(\frac{x-4}{x-4}+\frac{1}{x-4}\right)=\left(\frac{x-2}{x-2}+\frac{1}{x-2}\right)$
$+\left(\frac{x-5}{x-5}+\frac{1}{x-5}\right)$

বা, $1+\frac{1}{x-3}+1+\frac{1}{x-4}=1+\frac{1}{x-2}+1+\frac{1}{x-5}$

বা, $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}$

বা, $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-4}$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $\frac{x-2-x+3}{(x-3)(x-2)}=\frac{x-4-x+5}{(x-5)(x-4)}$

বা, $\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x^2-9x+20}$

বা, $x^2-9x+20=x^2-5x+6$

বা, $-9x+5x=6-20$ বা, $-4x=-14$ $\therefore$ $x=3\frac{1}{2}$.

উদা. 9. সমাধান কর : $\left(\frac{2x-10}{2x-5}\right)^2=\frac{x-10}{x-5}$ [C. U. '41]

উঃ এখানে, $\frac{4x^2-40x+100}{4x^2-20x+25}=\frac{x-10}{x-5}$

বা, $\frac{4x^2-40x+100}{x-10}=\frac{4x^2-20x+25}{x-5}$

বা, $\frac{4x(x-10)+100}{x-10}=\frac{4x(x-5)+25}{x-5}$

বা, $\frac{4x(x-10)}{(x-10)}+\frac{100}{x-10}=\frac{4x(x-5)}{(x-5)}+\frac{25}{x-5}$

বা, $4x+\frac{100}{x-10}=4x+\frac{25}{x-5}$ বা, $\frac{100}{x-10}=\frac{25}{x-5}$

বা, $\frac{4}{x-10}=\frac{1}{x-5}$ [উভয় পক্ষকে 25 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $4x-20=x-10$ বা, $3x=10$ $\therefore$ $x=3\frac{1}{3}$.

উদা. 10. সমাধান কর : $\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3=\frac{x-2a+b}{x+a-2b}$

উঃ সমীকরণটির উভয়পক্ষকে $\left(\frac{x-b}{x-a}\right)$ দ্বারা গুণ করিয়া,

$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2=\frac{(x-2a+b)(x-b)}{(x+a-2b)(x-a)}$

বা, $\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-2bx+b^2}=\frac{x^2-2ax+2ab-b^2}{x^2-2bx+2ab-a^2}$

বা, $\frac{x^2-2bx+2ab-a^2}{x^2-2bx+b^2}=\frac{x^2-2ax+2ab-b^2}{x^2-2ax+a^2}$ [একান্তর ক্রিয়া]

বা, $1+\dfrac{2ab-b^2-a^2}{x^2-2bx+b^2}=1+\dfrac{2ab-b^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}$

বা, $\dfrac{2ab-b^2-a^2}{x^2-2bx+b^2}=\dfrac{2ab-b^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}$

মনে কর, $(2ab-b^2-a^2)=p$;

$\therefore\quad \dfrac{p}{x^2-2bx+b^2}=\dfrac{p}{x^2+2ax+a^2}$

বা, $p(x^2-2ax+a^2)=p(x^2-2bx+b^2)$

বা, $-2px(a-b)=-p(a^2-b^2)$

ইহা x-এর একটি সরল সমীকরণ বলিয়া $-2p(a-b)\neq 0$;

$\therefore\quad x=\dfrac{p(a^2-b^2)}{2p(a-b)}=\dfrac{a+b}{2}.$

40. **বিবিধ উদাহরণ।** নিম্নে বিভিন্ন প্রকার সরল সমীকরণের সমাধান দেখান হইল।

উদা. 11. সমাধান কর :

$$(x+4)(x+2)(x+7)(x+1)=x(x+3)(x+5)(x+6)$$

উঃ $(x+4)(x+2)(x+7)(x+1)=x(x+3)(x+5)(x+6)$

বা, $\dfrac{(x+2)(x+1)}{x(x+3)}=\dfrac{(x+5)(x+6)}{(x+4)(x+7)}$

বা, $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+3x}=\dfrac{x^2+11x+30}{x^2+11x+28}$

বা, $1+\dfrac{2}{x^2+3x}=1+\dfrac{2}{x^2+11x+28}$

বা, $\dfrac{2}{x^2+3x}=\dfrac{2}{x^2+11x+28}$

বা, $\dfrac{1}{x^2+3x}=\dfrac{1}{x^2+11x+28}$ [2 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $x^2+11x+28=x^2+3x$ বা, $8x=-28$ $\therefore\ x=-3\frac{1}{2}.$

উদা. 12. সমাধান কর : $\dfrac{x-a^2}{b+c}+\dfrac{x-b^2}{c+a}+\dfrac{x-c^2}{a+b}=4(a+b+e)$

উঃ এখানে, $4(a+b+c)=2(a+b+c)+(b+c)+(c+a)+(a+b).$

$\therefore\quad \dfrac{x-a^2}{b+c}-(b+c)+\dfrac{x-b^2}{c+a}-(c+a)+\dfrac{x-c^2}{a+b}-(a+b)=2(a+b+c)$

বা, $\dfrac{x-a^2-(b+c)^2}{b+c}+\dfrac{x+b^2-(c+a)^2}{c+a}+\dfrac{x-c^2-(a+b)^2}{a+b}$

$$=2(a+b+c)$$

বা, $\frac{x-a^2-(b+c)^2}{b+c}-2a+\frac{x-b^2-(c+a)^2}{c+a}-2b+\frac{x-c^2-(a+b)^2}{a+b}-2c=0$

বা, $\frac{x-a^2-(b+c)^2-2a(b+c)}{b+c}+\frac{x-b^2-(c+a)^2-2b(c+a)}{c+a}+\frac{x-c^2-(a+b)^2-2c(a+b)}{a+b}=0$

বা, $\frac{x-(a+b+c)^2}{b+c}+\frac{x-(a+b+c)^2}{c+a}+\frac{x-(a+b+c)^2}{a+b}=0$

বা, $\{x-(a+b+c)^2\}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=0\cdots(i)$

এখন $\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$ রাশিটি (i) সরল সমীকরণে x-এর সহগ বলিয়া শূন্য নয়। $\therefore\ x-(a+b+c)^2=0 \quad \therefore\ x=(a+b+c)^2.$

প্রশ্নমালা 15

সমাধান কর :

1. $\frac{4-x}{4}-\frac{5-x}{5}+\frac{6-x}{6}=1$ 2. $\frac{x+3}{4}-\frac{x+4}{5}=\frac{x+5}{6}-\frac{x+6}{7}$

3. $\frac{x+a}{b}+\frac{x+b}{a}=-2$ 4. $\frac{a-x}{a}+\frac{2a-x}{2a}=\frac{3a-x}{3a}$ [C. U. '37]

5. $0{\cdot}5x+\frac{0{\cdot}02x+0{\cdot}07}{0{\cdot}03}-\frac{x+2}{9}=9{\cdot}5$ [C. U. '33]

6. $\frac{ax+a^2}{b+c}+\frac{bx+b^2}{c+a}+\frac{cx+c^2}{a+b}+a+b+c=0$

7. $\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}+\frac{x-ab}{a+b}=a+b+c$ [S. F. '69]

8. $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$ [C. U. '46]

9. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0$ [C. U. '14]

10. $\frac{2x-1}{3x-2}=\frac{4x-3}{6x-5}$ 11. $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{x^2-ab}$

12. $\dfrac{1}{2x+b}-\dfrac{1}{2x+a}=\dfrac{a-b}{4x^2+2ab}$ 13. $\dfrac{2}{x-a}+\dfrac{3}{x+a}=\dfrac{9a}{x^2-a^2}$

14. $\dfrac{6x-7}{9x+6}-\dfrac{5(x-1)}{12x+8}=\dfrac{1}{12}$ 15. $\dfrac{x+1}{4x+3}+\dfrac{2x+2}{15}=\dfrac{x+2}{5}$

16. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{2}{x+b}$ 17. $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{a+b}{x-a-b}$

$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{2}{x-3}$ [S.F. '65] 19. $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{7}{x+3}$

20. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x-6}-\dfrac{1}{x-8}$ 21. $\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x-7}=\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-9}$

22. $\dfrac{2}{2x-3}+\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{6}{3x-1}$ 23. $\dfrac{6}{3x-5}-\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{2}{2x-5}$

24. $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x-6}{x+3}=2$ 25. $\dfrac{3x+2}{x-1}+\dfrac{2(x-2)}{x+2}=5$

26. $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x-5}{x-6}-\dfrac{x-6}{x-7}$ 27. $\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{4x+5}{4x+4}+\dfrac{3x+3}{2x+1}$

28. $\dfrac{(x+2)(x+6)}{(x+4)(x+5)}=\dfrac{x+8}{x+9}$ 29. $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2=\dfrac{x+2}{x+4}$ [D. B. '43]

30. $\left(\dfrac{x-5}{x-6}\right)^3=\dfrac{x-4}{x-7}$ 31. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}+\dfrac{5}{x+5}=\dfrac{9}{x+4}$

32. $\dfrac{1}{x+6a}+\dfrac{2}{x-3a}+\dfrac{3}{x+2a}=\dfrac{6}{x+a}$

33. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$

34. $\dfrac{1}{(a-b)(x-a)}-\dfrac{1}{(c-d)(x-c)}=\dfrac{1}{(a-b)(x-b)}-\dfrac{1}{(c-d)(x-d)}$

[D. B. 1891]

35. $(x+1)(x+5)(x+7)(x+9)=(x+2)(x+4)(x+6)(x+10)$

[Mad. 1889]

36. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2(x-2)}{x-3}$ 37. $\dfrac{a+c}{x-2b}-\dfrac{b+c}{x-2a}=\dfrac{a-c}{x+2b}-\dfrac{b-c}{x+2a}$

38. $\dfrac{ax-b^2+c^2}{c-b}+\dfrac{bx-c^2+a^2}{a-c}+\dfrac{cx-a^2+b^2}{b-a}=2(a+b+c)$

39. $\dfrac{x+a^2+2c^2}{b+c}+\dfrac{x+b^2+2a^2}{c+a}+\dfrac{x+c^2+2b^2}{a+b}=0$

ষষ্ঠ অধ্যায়

সরল সমীকরণ-সংক্রান্ত প্রশ্নাবলী

(Problems leading to Simple Equations)

বীজগণিতের সমীকরণের সাহায্যে পাটীগণিতের নানাবিধ প্রশ্নের সহজেই সমাধান করা যায়। এক্ষেত্রে প্রশ্নের অজ্ঞাত রাশিকে x দ্বারা সূচিত করিয়া প্রদত্ত শর্তানুসারে x-এর সাহায্যে একটি সমীকরণ গঠন করিতে হয়। ঐ সমীকরণের সমাধান করিলেই অজ্ঞাত রাশিটির মান পাওয়া যায়। পূর্ববর্তী শ্রেণীতে সরল সমীকরণ-বিষয়ক প্রশ্নাবলীর আলোচনা করা হইয়াছে। এখানে সরল সমীকরণ-ঘটিত বিবিধ প্রশ্নের সমাধান-প্রণালী দেখান হইল।

41. সংখ্যা ও ভগ্নাংশ-বিষয়ক প্রশ্নাবলী ঃ

উদা. 1. তোমাদের শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা দুই অঙ্ক-বিশিষ্ট এরূপ একটি সংখ্যা যাহার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 6 ; যদি অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে, তবে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় তাহা মূল সংখ্যাটি অপেক্ষা 18 কম। শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, এককের স্থানের অঙ্কটি x এবং দশকের স্থানের অঙ্কটি $(x-6)$.

$\therefore$ শ্রেণীর নির্ণেয় ছাত্র-সংখ্যা $=10(6-x)+x$.

$\therefore$ অঙ্কগুলি উল্‌টাইয়া লিখিলে উৎপন্ন সংখ্যা $=10x+(6-x)$

শর্তানুসারে, $10(6-x)+x=10x+(6-x)+18$

বা, $60-10x+x=10x+6-x+18$

বা, $60-9x=9x+24$ বা, $-9x-9x=24-60$

বা, $-18x=-36$ $\therefore$ $x=2$.

$\therefore$ এককের স্থানের অঙ্কটি $-x=2$ এবং দশকের স্থানের অঙ্কটি $=6-x=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় ছাত্র-সংখ্যা $=10.4+2=42$.

উদা. 2. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কসমষ্টি 8 এবং মধ্য অঙ্কটি শূন্য। শতক ও একক স্থানীয় অঙ্কদ্বয় পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিলে সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যা অপেক্ষা 198 বড় হয়। সংখ্যাটি কত? [C. U. '22]

উঃ মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যাটির এককের স্থানের অঙ্কটি $=x$ এবং শতকের স্থানের অঙ্কটি $=(8-x)$।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=100(8-x)+10.0+x=800-99x$.

আবার মূল সংখ্যাটির একক ও শতক স্থানীয় অঙ্কদ্বয়ের পরিবর্তনের ফলে উৎপন্ন সংখ্যা $=100.x+10.0+(8-x)=99x+8$

শর্তানুসারে, $99x+8=800-99x+198$

বা, $99x+99x=998-8$ বা, $198x=990$ $\therefore$ $x=\frac{990}{198}=5.$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=800-99x=800-99.5=305.$

উদা. 3. কোন ভগ্নাংশের হরটি লব অপেক্ষা 3 বেশি। ভগ্নাংটির লবের সহিত 12 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি 3 বৃদ্ধি পায়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, নির্ণেয় ভগ্নাংশটির লব x এবং হর $(x+3)$; $\therefore$ ভগ্নাংশটি $=\frac{x}{x+3}.$

শর্তানুসারে, $\frac{x+12}{x+3}=\left(\frac{x}{x+3}\right)+3$ বা, $\frac{x+12}{x+3}=\frac{4x+9}{x+3}$ ...... (i)

বা, $(x+3)(x+12)=(x+3)(4x+9)$

বা, $(x+3)(x+12)-(x+3(4x+9)=0$ বা, $(x+3)(3-3x)=0$

এখন (i) হইতে ইহা স্পষ্ট যে $x+3\neq 0$;

$\therefore$ $3-3x=0$ বা, $-3x=-x$ বা, $x=1$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{x}{x+3}=\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}.$

উদা. 4. ইস্টবেঙ্গল বনাম স্থানীয় একাদশের একটি প্রদর্শনী ফুটবল খেলায় ছাত্রদের জন্যে টিকিটের হার 35 পয়সা এবং অন্যান্য সকলের জন্যে টিকিটের হার 75 পয়সা ধার্য হইল। 2148 জন দর্শক খেলাটি দেখাতে মোট 1091 টাকা আয় হইল। কতজন ছাত্র খেলা দেখিয়াছিল ?

উঃ মনে কর, x জন ছাত্র খেলাটি দেখিয়াছিল।

অতএব, ছাত্র ভিন্ন অন্যান্য দর্শকের সংখ্যা $=(2148-x)$ জন।

$\therefore$ শর্তানুসারে, $x.35$ পয়সা $+(2148-x).\ 75$ পয়সা $=109100$ পয়সা

বা, $35x+161100-75x=109100$ বা, $-40x=-52000$

$\therefore$ $x=1300$ $\therefore$ নির্ণেয় ছাত্রসংখ্যা $=1300$ জন।

42. সময় ও দূরত্ব-বিষয়ক প্রশ্নাবলী :

উদা. 5. A এবং B হইতে দুইটি ট্রেন যথাক্রমে 45 কি. মি. এবং $27\frac{1}{2}$ কি মি. বেগে পরস্পরের অভিমুখে রওনা হইল। যখন একটি ট্রেন অপরটি হইতে 28 কি মি. বেশি চলিল তখন তাহাদের সাক্ষাৎ হইল। A এবং B এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, রওনা হইবার x ঘণ্টা পরে উহাদের সাক্ষাৎ হইল।

$\therefore$ x ঘণ্টায় 45 কি. মি বেগের ট্রেন কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব $=45x$ কি. মি.

আবার, x ঘণ্টায় $27\frac{1}{2}$ কি.মি. বেগের ট্রেন কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব $=27\frac{1}{2}x$ কি.মি.।

$\therefore$ শর্তানুসারে, $45x-27\frac{1}{2}x=28$

বা, $45x-\frac{55x}{2}=28$ বা, $\frac{35x}{2}=28$ $\therefore$ $x=\frac{28\times2}{35}=\frac{8}{5}$

$\therefore$ ট্রেনদ্বয় কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব $=(45x+27\frac{1}{2}x)$ কি. মি.
$=(45.\frac{8}{5}+\frac{55}{2}.\frac{8}{5})$ কি. মি.
$=(72+44)$ কি. মি. $=116$ কি. মি.

$\therefore$ A ও B-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $=116$ কি. মি.

উদা 6. কমল 176 গজ দৌড়াইবার পর বিমল তাহার পিছনে ছুটিল। বিমল 5 মিনিটে এবং কমল 6 মিনিটে 1 মাইল পথ অতিক্রম করে। কমল আর কতদূর গেলে বিমল তাহাকে ধরিয়া ফেলিবে?

উঃ বিমল 5 মিনিটে যায় 1760 গজ।
,, 1 ,, ,, 352 গজ।
আবার কমল 6 ,, ,, 1760 গজ।
কমল 1 ,, ,, $\frac{880}{3}$ গজ।

মনেকর, কমল আরও x গজ গেলে বিমল তাহাকে ধরিয়া ফেলিবে। অর্থাৎ কমল যে সময়ে ঐ দূরত্ব অতিক্রম করে, বিমল সেই সময় $(176+x)$ গজ অতিক্রম করিবে।

$\therefore$ শর্তানুসারে, $\frac{176+x}{352}=\frac{x}{(\frac{880}{3})}$ বা, $\frac{176+x}{352}=\frac{3x}{880}$

বা, $\frac{176+x}{2}=\frac{3x}{5}$ [উভয় পক্ষকে 176 দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $880+5x=6x$ $\therefore$ $x=880.$

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=880$ গজ।

43. শতকরা ও লাভ-ক্ষতি বিষয়ক প্রশ্নাবলী:

উদা. 7. এক ব্যক্তি একটি জিনিস কিনিয়া উহা 6% লাভে বিক্রয় করিল। যদি জিনিসটির ক্রয়মূল্য 4% কম হইত এবং সে উহা যে দরে বেচিয়াছিল তাহা অপেক্ষা আরও 1·14 টাকা বেশি দরে বিক্রয় করিত তবে তাহার 12% লাভ হইত। সে কত দরে জিনিসটি কিনিয়াছিল? [C. U. '44]

উঃ মনে কর, জিনিসটির ক্রয়মূল্য $=x$ টাকা।

$\therefore$ 6% লাভে উহার বিক্রয়মূল্য $=\left(x+\frac{6x}{100}\right)$ টাকা $=\frac{53x}{50}$ টাকা

আবার 4% কমে জিনিসটি ক্রয় করিলে উহার ক্রয়মূল্য

$=\left(x-\frac{4x}{100}\right)$ টাকা $=\frac{24x}{25}$ টাকা।

এখন জিনিসটি $\left(\frac{53x}{50}+1{\cdot}14\right)$ টাকায় বিক্রয় করাতে লাভ হয়

$=\left(\frac{24x}{25}\times\frac{12}{100}\right)$ টাকা $=\frac{72x}{625}$ টাকা।

শর্তানুসারে, $\frac{53x}{50}+1{\cdot}14=\frac{24x}{52}+\frac{72x}{625}$

উভয় পক্ষকে হরগুলির ল. সা. গু. 1250 দ্বারা গুণ করিয়া,

$1325x+1425=1200x+144x$

বা, $1325x-1200x-144x=-1425$

বা. $-19x=-1425$ $\therefore$ $x=75.$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্রয়মূল্য $=75$ টাকা।

44. বর্গাকার-বিষয়ক প্রশ্নাবলী :

যদি প্রত্যেক সারিতে সমান সংখ্যক ব্যক্তি বা বস্তুকে লইয়া এরূপ কয়েকটি সমান্তরাল সারি গঠন করা যায় যে, মোট সারির সংখ্যা যত প্রত্যেক সারিতে ব্যক্তি বা বস্তুর সংখ্যাও তত হয়, তবে উক্ত সমাবেশকে **সম্পূর্ণ বর্গ** (Solid Square) বলে। যদি সম্পূর্ণ বর্গাকার সন্নিবেশের মধ্যে শূন্যস্থান রাখিয়া পর পর কয়েকটি সমান সারিতে ব্যক্তি বা বস্তুগুলিকে সাজান হয়, তবে ঐ সমাবেশকে **শূন্যগর্ভ বর্গ** (Hollow Square) বলে। শূন্যগর্ভ বর্গের শূন্য স্থানের প্রান্তরেখা হইতে মূল বর্গক্ষেত্রটির বহিঃসীমা পর্যন্ত যত সংখ্যক সারি থাকিবে তাহাকে উহার **গভীরতা** (Deep) বলে। যদি মূল বর্গক্ষেত্রটির সম্মুখ সারিতে x সংখ্যক বস্তু থাকে এবং বর্গক্ষেত্রটি a-গভীরতা বিশিষ্ট হয়, তবে শূন্যগর্ভ বর্গটিতে মোট বস্তুর সংখ্যা $=x^2-(x-2a)^2$.

উদা. 8. 40 জন লোককে 2 গভীর একটি শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইলে উহার সম্মুখ সারিতে লোকের সংখ্যা কত হইবে ?

উঃ মনে কর, সম্মুখ সারির লোকের সংখ্যা $=x$.

এক্ষেত্রে শূন্যগর্ভ বর্গক্ষেত্রের গভীরতা 2 বলিয়া ফাঁকা বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু $(x-4)$। $\therefore$ শূন্যগর্ভ বর্গটির মোট লোকের সংখ্যা $=x^2-(x-4)^2$.



শর্তানুসারে, $x^2-(x-4)^2=40$

বা, $x^2-(x^2-8x+16)=40$

বা, $x^2-x^2+8x-16=40$

বা, $8x=56$ $\therefore$ $x=7$

$\therefore$ সম্মুখ সারিতে 7 জন লোক থাকিবে।

45. ঘড়ি-বিষয়ক প্রশ্নাবলী :

(1) ঘড়ির উপরিভাগ (dial) ছোট ছোট 60টি ভাগে বিভক্ত। ইহার এক একটি ঘরকে মিনিট বলে। এক ঘণ্টায় ঘণ্টার কাঁটা মাত্র 5 মিনিট-ঘর অতিক্রম করে এবং সেই সময়ে মিনিটের কাঁটাটি 60 মিনিট-ঘর অতিক্রম করিবে।

∴ 60 মিনিটে মিনিটের কাঁটা 60 ঘর গেলে, ঘণ্টার কাঁটা যায় 5 ঘর।

∴ 1 ,, ,, ,, 1 ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{1}{12}$ ঘর।

∴ x ,, ,, ,, x ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{x}{12}$ ঘর।

(2) ঘড়ির কাঁটা দুইটি যখন একত্রে থাকে তখন তাহাদের মধ্যে কোন ব্যবধান থাকে না। যখন উহারা বিপরীত দিকে থাকে তখন উহাদের মধ্যে 30 মিনিট-ঘর পার্থক্য হইবে। আবার কাঁটা দুইটি পরস্পর সমকোণে থাকিলে উহাদের মধ্যে 15 বা 45 মিনিট-ঘর পার্থক্য থাকিবে। মনে রাখিবে যে শেষোক্ত অবস্থানটি ঘণ্টায় দুইবার ঘটিয়া থাকে।

যদি বলা হয় যে কাঁটা দুইটি একই সরলরেখায় আছে, তবে বুঝিতে হইবে যে হয় উহারা একে অন্যের উপর সমপাতিত হইয়াছে অথবা উহারা পরস্পর বিপরীত দিকে অবস্থান করিতেছে।

উদা. 9. 2টা ও 3টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি (i) একত্রে, (ii) পরস্পর বিপরীত দিকে এবং (iii) পরস্পর সমকোণে থাকিবে?

উঃ 2টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটাটির দশ মিনিট-ঘর পিছনে আছে।
(i) মনে কর, 2টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি একত্রিত হইবে।

এখন ঘণ্টার কাঁটা x মিনিটে $\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর অতিক্রম করিবে। অতএব, x মিনিটে মিনিটের কাঁটাকে $\left(10+\frac{x}{12}\right)$ মিনিট-ঘর যাইতে হইবে।

$$\therefore \quad x=10+\frac{x}{12}$$

বা, $x-\frac{x}{12}=10$ বা, $\frac{11x}{12}=10$ $\therefore\ x=10\frac{10}{11}$

∴ 2টা $10\frac{10}{11}$ মিনিটে কাঁটাদ্বয় একত্রিত হইবে।

(ii) কাঁটা দুইটি যখন পরস্পর বিপরীত দিকে থাকিবে তখন তাহাদের মধ্যে 30 মিনিট-ঘর পার্থক্য থাকিবে।

মনে কর, 2টা x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি পরস্পর বিপরীত দিকে থাকিবে। x মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা যায় $\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর। যেহেতু 2টার সময় মিনিটের কাঁটাটি ঘণ্টার কাঁটার 10 মিনিট পিছনে আছে, অতএব বিপরীতমুখী হইতে হইলে

উহাকে $\left(10+\frac{x}{12}+30\right)$ বা, $\left(\frac{x}{12}+40\right)$ মিনিট-ঘর যাইতে হইবে। কিন্তু মিনিটের কাঁটা x মিনিট-ঘর অতিক্রম করিবে।

$\therefore\ x=\frac{x}{12}+40$ বা, $x-\frac{x}{12}=40$ বা, $\frac{11x}{12}=40$ $\therefore\ x=43\frac{7}{11}$

$\therefore$ 2টা $43\frac{7}{11}$ মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি বিপরীত দিকে অবস্থান করিবে।

(iii) যখন কাঁটা দুইটির মধ্যে 15 মিনিট-ঘর অথবা 45 মিনিট-ঘর ব্যবধান থাকিবে তখনই উহারা পরস্পর সমকোণে নত থাকিবে।

মনে কর, 2টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি সমকোণে অবস্থান করিবে।

এখন x মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা $\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর অতিক্রম করে। অতএব পরস্পর সমকোণে থাকিতে হইলে মিনিটের কাঁটাকে $\left(10+\frac{x}{12}+15\right)$ এবং $\left(10+\frac{x}{12}+45\right)$ মিনিট-ঘর অতিক্রম করিতে হইবে। কিন্তু x মিনিটে মিনিটের কাঁটা x মিনিট-ঘর যায়।

$\therefore\ x=10+\frac{x}{12}+15$ এবং $x=10+\frac{x}{12}+45$

বা, $x-\frac{x}{12}=25$ বা, $x-\frac{x}{12}=55$

বা, $\frac{11x}{12}=25$ বা, $\frac{11x}{12}=55$

বা, $x=27\frac{3}{11}$ $\therefore\ x=60$

$\therefore$ 2টা $27\frac{3}{11}$ মিনিটের সময় এবং 2টা 60 মিনিট অর্থাৎ 3টার সময় কাঁটা দুইটি পরস্পর সমকোণে নত থাকিবে।

উদা. 10. কত সময়ের ব্যবধানে ঘড়ির কাঁটা দুইটি পর পর মিলিত হয়?

উঃ 12টার সময় কাঁটা দুইটি একবার মিলিত হয়। মনে কর, 12টা বাজিয়া x মিনিট পরে কাঁটা দুইটি পুনরায় মিলিত হইবে। এই x মিনিটে ঘড়িতে 1টা বাজিয়া $(x-60)$ মিনিট হইবে। অর্থাৎ ঐ সময়ে মিনিটের কাঁটা 12 চিহ্ন হইতে $(x-60)$ মিনিট ঘর সামনে থাকিবে। অপরপক্ষে ঘণ্টার কাঁটাটি ঐ চিহ্ন হইতে $\left(5+\frac{x-60}{12}\right)$ মিনিট-ঘর সামনে থাকিবে। যেহেতু এই অবস্থায় কাঁটা দুইটি পরস্পর মিলিত হয়, অতএব $x-60=5+\frac{x-60}{12}$

বা, $12x-720=60+x-60$ বা, $11x=720$ বা, $x=65\frac{5}{11}$.

$\therefore$ $65\frac{5}{11}$ মিনিট অর্থাৎ 1 ঘণ্টা $5\frac{5}{11}$ মিনিট পর পর কাঁটা দুইটি মিলিত হইবে।

উদা. 11. এক ব্যক্তি 4টা ও 5টার মধ্যে বাহির হইয়া 5টা ও 6টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিলেন যে কাঁটা দুইটি স্থান বিনিময় করিয়াছে। তিনি কখন বাহির হইয়াছিলেন? [C U. '30]

উঃ মনে কর, ঐ ব্যক্তি 4টা x মিনিটের সময় বাহির হইয়াছিলেন। এখন x মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা $\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর যায়। অতএব 4টা x মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটাটি ঘড়ির XII-চিহ্ন হইতে x মিনিট-ঘর এবং ঘণ্টার কাঁটাটি ঐ চিহ্ন হইতে $\left(20+\frac{x}{20}\right)$ মিনিট ঘর দূরে ছিল।

আবার, যখন ঐ ব্যক্তি ফিরিয়া আসিলেন, তখন মিনিটের কাঁটা ঘড়ির XII-চিহ্ন হইতে $\left(20+\frac{x}{20}\right)$ মিনিট-ঘর এবং ঘণ্টার কাঁটা ঐ চিহ্ন হইতে x মিনিট-ঘর দূরে ছিল।

$\therefore$ ঐ ব্যক্তি 5টা $\left(20+\frac{x}{12}\right)$ মিনিটের সময় ফিরিয়াছিলেন। এখন 5টা $\left(20+\frac{x}{12}\right)$ মিনিটের সময় ঘণ্টার কাঁটাটি ঘড়ির XII-চিহ্ন হইতে $\left\{25+\dfrac{20+\frac{x}{12}}{12}\right\}$ মিনিট-ঘর দূরে থাকিবে।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $x=25+\dfrac{20+\frac{x}{12}}{12}$ বা, $12x=300+20+\frac{x}{12}$

বা, $12x-\frac{x}{12}=320$ বা, $\frac{143x}{12}=320$ $\therefore$ $x=26\frac{122}{143}$

$\therefore$ ঐ ব্যক্তি 4টা $26\frac{122}{143}$ মিনিটের সময় বাহির হইয়াছিলেন।

[বিকল্প পদ্ধতির জন্য সহ-সমীকরণের প্রশ্নাবলীর উদাহরণমালা দেখ।]

প্রশ্নমালা 16

1. দুইটি সংখ্যার যোগফল 1722 এবং যখন বৃহত্তর সংখ্যাটি ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটির দ্বারা বিভাজ্য হয় তখন ভাগফল 81 ; সংখ্যা দুইটি বাহির কর।

2. 54-কে এমন দুইটি অংশে বিভক্ত কর যাহাতে প্রথম অংশের দ্বিগুণ হইতে দ্বিতীয় অংশের 3 গুণ বিয়োগ করিলে 8 বাকী থাকে। [S. F. '54]

3. দুই অঙ্কের সংখ্যার দশকের অঙ্কটি এককের অঙ্কের 3 গুণ। যদি সংখ্যাটি হইতে 54 বিয়োগ করা হয়, তবে অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি কত?

4. তোমাদের শ্রেণীর ছাত্র-সংখ্যা দুই অঙ্ক-বিশিষ্ট এমন একটি সংখ্যা যাহার অঙ্কদ্বয়ের যোগফল 7 ; যদি অঙ্ক দুইটি স্থান পরিবর্তন করে তবে সংখ্যাটি 9 বেশী হয়। শ্রেণীর ছাত্র-সংখ্যা কত?

5. দুইটি সংখ্যার অন্তরফল 27 ; বৃহত্তরটিকে ক্ষুদ্রতরটি দ্বারা ভাগ করিলে 7 ভাগফল এবং 3 ভাগশেষ পাওয়া যায়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

6. তিন অঙ্ক দ্বারা গঠিত কোন সংখ্যার প্রত্যেক অঙ্ক তাহার পরবর্তী অঙ্ক অপেক্ষা এক কম। যদি সংখ্যাটি হইতে 27 বিয়োগ করা হয়, তবে বিয়োগফলটি অঙ্ক তিনটির সমষ্টির 16 গুণ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C. U. '46]

7. কোন ভগ্নাংশের হরটি লব অপেক্ষা 2 বেশি। যদি লবটি 7 বাড়ান হয়, তবে ভগ্নাংশটি 1 বৃদ্ধি পায়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। [C. U. '50]

8. কোন বিদ্যালয়ে নবম ও দশম শ্রেণীর মোট 154 জন ছাত্রের নিকট হইতে মাসিক 652 টাকা আয় হয়। এই দুই শ্রেণীর মাসিক বেতন যথাক্রমে 4·00 টাকা এবং 4·50 টাকা হইলে নবম শ্রেণীর ছাত্র-সংখ্যা কত?

9. কোন নির্বাচনে A এবং B দুইজন প্রার্থী ছিল। ভোটারদের $\frac{2}{5}$ অংশ Aকে ভোট দেওয়ায় A, 200 ভোট বেশি পাইয়া জয়লাভ করিল। যদি ভোটারদের $\frac{1}{3}$ অংশ কোন পক্ষে ভোট না দেয়, তবে ভোটারের মোট সংখ্যা কত?

10. পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ। 8 বৎসর পরে পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত হইবে 7 : 4 ; পুত্রের বর্তমান বয়স কত? [C. U. '32]

11. পিতার বয়স জ্যেষ্ঠ পুত্রের বয়সের 4 গুণ এবং কনিষ্ঠ পুত্রের বয়সের 5 গুণ। জ্যেষ্ঠ পুত্রের বয়স যখন তাহার বর্তমান বয়সের 3 গুণ হইবে তখন পিতার বয়স কনিষ্ঠ পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ অপেক্ষা 4 বৎসর বেশি হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স কত? [S. F. '53]

12. 140 ঘন ইঞ্চি আয়তনের একটি তামা ও টিনের মিশ্রণের ওজন 42 পাউণ্ড 3 আউন্স। এক ঘন ইঞ্চি তামার ওজন $5\frac{1}{4}$ আউন্স এবং এক ঘন ইঞ্চি টিনের ওজন $4\frac{1}{4}$ আউন্স হইলে মিশ্রণটিতে তামা ও টিনের পরিমাণ কত?

13. একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থ অপেক্ষা 8 ফুট বেশি। ঘরটির দেওয়াল হইতে ভিতরের দিকে 2 ফুট চওড়া স্থানের ক্ষেত্রফল 240 বর্গফুট। ঘরটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

14. P এবং Q যথাক্রমে হাওড়া এবং মধুপুর হইতে একই সময়ে রওনা হইল, এবং তাহারা পরস্পরের প্রতি যথাক্রমে ঘণ্টায় 20 কি.মি. এবং 30 কি.মি. বেগে অগ্রসর হইতে লাগিল। যখন Q, P অপেক্ষা 36 কি.মি. বেশি চলিল তখন তাহারা মিলিত হইল। হাওড়া এবং মধুপুরের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

15. A যে কাজ 20 দিনে করিতে পারে, B সেই কাজ 12 দিনে করিতে পারে। A কাজটি কয়দিন করার পর B তাহার পরিবর্তে কাজ করিতে লাগিল এবং সমস্ত কাজটি 14 দিনে শেষ হইল। A কতদিন কাজ করিয়াছিল? [S. F. '57]

16. একজন মজুরকে 30 দিনের জন্য এই শর্তে নিযুক্ত করা হইল যে, সে একদিন কাজ করিলে 2 শিলিং 6 পেনি পাইবে, কিন্তু একদিন কাজ না করিলে 1 শিলিং ক্ষতিপূরণ দিবে। সে যদি ঐ সময়ের শেষে মোট 2 পাউণ্ড 7 শিলিং পাইয়া থাকে, তবে সে কতদিন কাজ করে নাই? [S. F. '55]

17. কোন মোটর আরোহী 6 ঘণ্টায় 80 মাইল ভ্রমণ করে। সে প্রথম অংশে ঘণ্টায় 10 মাইল করিয়া এবং দ্বিতীয় অংশে ঘণ্টায় 18 মাইল করিয়া ভ্রমণ করে। সে প্রতি পাল্লায় কত দূরত্ব অতিক্রম করে ?

18. এক ব্যক্তি নির্দিষ্ট বেগে চলিয়া নির্দিষ্ট সময়ে গন্তব্যস্থলে পৌঁছাইতে পারে। কিন্তু নির্দিষ্ট বেগের $\frac{5}{6}$ বেগে চলিলে গন্তব্যস্থলে পৌঁছাইতে তাহার 2 ঘণ্টা 30 মিনিট বিলম্ব হয়। নির্দিষ্ট বেগে চলিলে গন্তব্যস্থলে পৌঁছিতে তাহার কত সময় লাগিবে ?

19. কোন লোক সমবেগে চলিয়া কোন দূরত্ব $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় অতিক্রম করে। যদি দূরত্বটি 1 কি. মি. কম হয় এবং তাহার বেগ ঘণ্টায় 2 কি. মি. বেশি হয়, তবে তাহার অর্ধ ঘণ্টা কম সময় লাগে। লোকটির বেগ নির্ণয় কর।

20. রমেন 100 মি. দৌড়াইবার পর বিজয় তাহার পিছনে ছুটিল। প্রতি মিনিটে রমেন 176 মি. এবং বিজয় $293\frac{1}{3}$ মি দৌড়ায়। রমেন আর কত মিটার দৌড়াইবার পর বিজয় তাহাকে ধরিয়া ফেলিবে ?

21. এক কৃষক সমান সংখ্যায় দুই জাতীয় ভেড়া কিনিল। প্রথম জাতীয় প্রত্যেকটির মূল্য 6 টাকা ও অপর জাতীয় প্রত্যেকটির মূল্য 8 টাকা। যদি সে সমান পরিমাণ টাকায় ঐ দুই জাতীয় ভেড়া কিনিত তাহা হইলে সে ঐ টাকায় আরও 3টি ভেড়া বেশি পাইত। সে প্রত্যেক জাতীয় ভেড়া কয়টি করিয়া কিনিয়াছিল ?

22. একটি লোক 24 পয়সায় এক ডজন করিয়া আম ক্রয় করিয়া দেখিল যে ক্রীত আমের মধ্যে 50টি নষ্ট। সে অবশিষ্ট আম 24 পয়সায় 9টি করিয়া বিক্রয় করিয়া 6 টাকা লাভ করিল। সে কত আম কিনিয়াছিল ?

23. গোপাল 12 টাকা মিটার দরে 60 মিটার কাপড় কিনিয়া প্রতি মিটার 12·50 টাকা দরে 24 মিটার কাপড় বিক্রয় করিল ; বাকী কাপড় কি দরে বিক্রয় করিলে তাহার $6\frac{2}{3}\%$ লাভ হইবে ?

24. একটি লোক একটি বস্তু কিনিয়া 6% লাভে বিক্রয় করিল। যদি সে বস্তুটি 4% কমে ক্রয় করিয়া আরও 1 টা. 90 প. বেশি দামে বিক্রয় করিত, তবে তাহার 12% লাভ হইত। সে কত মূল্যে উহা ক্রয় করিয়াছিল ? [C. U. '44]

25. একজন লোক কতকগুলি আনারস ক্রয় করিল। সে টাকায় 2টি হিসাবে অর্ধেক এবং টাকায় 3টি হিসাবে বাকী অর্ধেক আনারস ক্রয় করিল। সে ঐ আনারসগুলি 2 টাকায় 5টি হিসাবে বিক্রয় করিয়া দেখিল যে মোটের উপর তাহার 1 টাকা ক্ষতি হইয়াছে। সে কতগুলি আনারস ক্রয় করিয়াছিল ? [S. F. '61]

26. একটি বোর্ডিং-এ 50 জন লোক আছে। উহার ম্যানেজার দেখিলেন যে আরও 10 জন লোক বেশী হইলে মোট মাসিক খরচ 20 টাকা বাড়ে, কিন্তু গড়ে লোক প্রতি 1 টাকা কম খরচ হয়। প্রথমে বোর্ডিংটির মাসিক খরচ কত ছিল ?

27. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার সৈন্যগণকে 5-গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইতে পারেন। যদি মোট সৈন্যসংখ্যা 1900 হয়, তবে সম্মুখের সারির সৈন্যসংখ্যা কত ? [C. U. '48]

28. কোন সেনাপতি তাঁহার সৈন্যগণকে 3-গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইতে পারেন। আরও 800 সৈন্য থাকিলে তিনি সম্মুখের সারিতে পূর্বের সমান লোক রাখিয়া সকলকে 4-গভীর করিয়া সাজাইতে পারেন। তাঁহার কত সৈন্য ছিল? [C. U. '42]

29. একটি প্রতিষ্ঠানের কর্মীদের গড় বেতন 250 টাকা; উহাদের মধ্যে 2 জন দারোয়ানের গড় বেতন 125 টাকা, 2 জন ম্যানেজারের গড় বেতন 825 টাকা, 21 জন মেকানিকের গড় বেতন 350 এবং অবশিষ্ট কর্মীদের গড় বেতন 210 টাকা। প্রতিষ্ঠানটির কর্মী-সংখ্যা কত?

30. একজন ব্যবসায়ী 90 কে. জি. তেল 8% এবং 50 কে. জি. তেল 10% লাভে বিক্রয় করিল। যদি সে সমস্ত তেল 9% লাভে বিক্রয় করিত তবে তাহার 3 টাকা বেশি লাভ হইত; প্রতি কে, জি তেলের ক্রয়-মূল্য কত?

31. 3টা ও 4টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি একই সরল রেখায় থাকিবে? [C. U. '34]

32. (i) 4টা ও 5টার মধ্যে কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর সমকোণে থাকিবে? [C. U. '46]

(ii) যদি কোন ঘড়ির কাঁটা দুইটি প্রতি 65 মিনিট পর পর মিলিত হয় তবে উহা দিনে কত স্লো বা ফাস্ট যাইবে?

33. 5টা এবং 6টার মধ্যে একটি লোক সান্ধ্যভ্রমণে বাহির হইয়া 6টা এবং 7টার মধ্যে গৃহে ফিরিল এবং দেখিল যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পরের মধ্যে স্থান পরিবর্তন করিয়াছে। সে কখন বাহির হইয়াছিল? [C. U. '44]

34. একটি ট্রেন 40 কি মি/ঘণ্টায় বেগে 300 কি. মি. অতিক্রম করিবে, কিন্তু কিছুদূর যাইবার পর উহা 30 মিনিট দেরী করিল এবং বেগ 5 কি./ঘ. বৃদ্ধি করিয়া নির্দিষ্ট সময়ে গন্তব্যস্থানে উপস্থিত হইল। ট্রেনটি কতদূরে আসিয়া দেরী করিয়াছিল?

35. কিছু অর্থ কতকগুলি লোকের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়ায় প্রত্যেকে 7 শিলিং 6 পেনি করিয়া পায়। যদি সেখানে আরও দুইজন লোক থাকিত তবে প্রত্যেকে 6 শিলিং 8 পেনি করিয়া পাইত। সেখানে পূর্বে কতগুলি লোক ছিল?

36. একটি পাত্রে রক্ষিত মিশ্রণে অম্ল এবং জলের অনুপাত 4 : 3; অন্য একটি পাত্রে রক্ষিত মিশ্রণে অম্ল এবং জলের অনুপাত 3 : 4; প্রথম পাত্রের 3 গ্যালন মিশ্রণের সহিত দ্বিতীয় পাত্রের কত পরিমাণ মিশ্রণ যুক্ত করিলে চূড়ান্ত মিশ্রণে অম্ল এবং জলের অনুপাত 6 : 7 হইবে?

37. একটি চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। প্রথম দুইটি দ্বারা যথাক্রমে 15 ঘণ্টায় এবং 18 ঘণ্টায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয় কিন্তু তৃতীয়টি দ্বারা উহা 12 ঘণ্টায় খালি হইয়া যায়। তিনটি নল প্রাতে যথাক্রমে 5টা, 6টা ও 7টায় খুলিয়া দিলে কখন চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে?

সপ্তম অধ্যায়
সহ-সমীকরণ
(Simultaneous equations)

46. **সহ-সমীকরণ** (Simultaneous equations):

যদি একাধিক অজ্ঞাতরাশিযুক্ত দুই বা ততোধিক সমীকরণের প্রত্যেকটি উহাদের অন্তর্গত সাধারণ অজ্ঞাতরাশিগুলির নির্দিষ্ট সংখ্যক মানসমূহ দ্বারা যুগপৎ সিদ্ধ হয় তবে ঐ সমীকরণগুলিকে **সহ-সমীকরণ** (Simultaneous equations) বলে। যেমন, $x+y-z=0$; $x-3y+2z=1$; $3x+4y+z=14$.

সমীকরণ তিনটিতে x, y এবং z সাধারণ অজ্ঞাতরাশি। এস্থলে $x=1$, $y=2$ এবং $z=3$ হইলে প্রদত্ত সমীকরণ তিনটি যুগপৎ সিদ্ধ হয় বলিয়া উহারা সহ-সমীকরণ। আবার উপরোক্ত সমীকরণ তিনটির অজ্ঞাত রাশিগুলি একঘাত বিশিষ্ট ; অতএব, উহাদের **একঘাত সহ-সমীকরণ** (Linear Simultaneous equations) বলা হয়।

দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট কোন সমীকরণের অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের অসংখ্য মান থাকিতে পারে। যেমন, $x+y=9$ সমীকরণটি $x=0$, $y=9$ বা, $x=1$, $y=8$ বা, $x=2$, $y=7$ বা, $x=-1$, $y=10$ ইত্যাদি অসংখ্য মান দ্বারা সিদ্ধ হইবে। এইরূপ $x-y=1$ সমীকরণটিও x এবং y-এর অসংখ্য মান দ্বারা সিদ্ধ হয়। এখন যদি $x+y=9$ এবং $x-y=1$ সমীকরণদ্বয়কে সমাধান করিতে বলা হয় তবে $x+y=9$ সমীকরণটির x এবং y-এর মানগুলির মধ্যে যাহারা $x-y=1$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিতে পারিবে তাহাদেরই নির্ণয় করিতে হইবে। সমীকরণ দুইটি হইতে দেখা যাইবে যে $x=5$ এবং $y=4$ হইলেই সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হয়। অতএব প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের নির্ণেয় সমাধান হইবে $x=5$ এবং $y=4$,

অতএব বলা যায় যে দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান করিতে হইলে দুইটি সমীকরণের প্রয়োজন। অনুরূপে তিনটি অজ্ঞাত রাশি থাকিলে অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট তিনটি সমীকরণের প্রয়োজন। অবশ্য সহ-সমীকরণগুলির প্রত্যেকটিতেই সব কয়টি অজ্ঞাত রাশি থাকিতে হইবে এইরূপ কোন বাধ্যবাধকতা নাই। যেমন, $9x-y=1$ এবং $3y=24$ সমীকরণদ্বয় সহ-সমীকরণ এবং ঐ সমীকরণ দুইটি হইতে উহাদের সহজেই সমাধান করা যাইবে।

সহ-সমীকরণগুলি সমাধান করিতে হইলে উহাদের অবশ্যই পরস্পর নিরপেক্ষ হওয়া প্রয়োজন। যেমন, $3x+y=7$ এবং $9x+3y=21$ সমীকরণ দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ নয়। ইহাদের দ্বিতীয় সমীকরণটি প্রথম সমীকরণটির একটি সরল গুণিতক বলিয়া উহারা প্রকৃতপক্ষে একটি সমীকরণকেই নির্দেশ করে।

যদি দুইটি অজ্ঞাত রাশিদ্বারা এমন দুইটি সমীকরণ গঠন করা যায় যে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের কোন মানেই উক্ত সহ-সমীকরণদ্বয় যুগপৎ সিদ্ধ হয় না তবে উহাদের **অসঙ্গত সমীকরণ** (Inconsistent equation) বলে। যেমন, $5x+6y=31$ এবং $5x+6y=1$ সমীকরণদ্বয় x ও y-এর কোন মানেই যুগপৎ সিদ্ধ নয়।

উপপাদ্য : যদি $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ সমীকরণদ্বয়ের ক্ষেত্রে $(a_1b_2-a_2b_1)$-এর মান শূন্য না হয় তবে সমীকরণ দুইটি সহ-সমীকরণ হইবে এবং x ও y-এর কেবলমাত্র একটি করিয়া মান পাওয়া যাইবে যাহাদের দ্বারা সমীকরণদ্বয় যুগপৎ সিদ্ধ হইবে।

প্রমাণ : মনে কর, $p=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ এবং $q=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$.

এখন দেখা যায় যে, $a_1p+b_1q+c_1=0\cdots\cdots(i)$

এবং $a_2p+b_2q+c_2=0\cdots\cdots(ii)$

$\therefore$ $x=p$ এবং $y=q$ উক্ত সমীকরণদ্বয়ের একটি সমাধান।

মনে কর, $x=p_1$ এবং $y=q_1$ প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির অন্য একটি সমাধান।

$\therefore$ $a_1p_1+b_1q_1+c_1=0\cdots\cdots(iii)$

এবং $a_2p_1+b_2q_1+c_2=0\cdots\cdots(iv)$

এখন (i) হইতে (ii) এবং (iii) হইতে (iv) বিয়োগ করিয়া,

$a_1(p-p_1)+b_1(q-q_1)=0\cdots\cdots(v)$

$a_2(p-p_1)+b_2(q-q_1)=0\cdots\cdots(vi)$

(v)-কে a_2 এবং (vi)-কে a_1 দ্বারা গুণ করিয়া,

$a_1a_2(p-p_1)+a_2b_1(q-q_1)=0\cdots(vii)$

$a_1a_2(p-p_1)+a_1b_2(q-q_1)=0\cdots(viii)$

(viii) হইতে (vii) বিয়োগ করিয়া,

$(a_1b_2-a_2b_1)(q-q_1)=0$

বা, $q-q_1=0$ $[\because a_1b_2-a_2b_1\neq 0]$ $\therefore$ $q=q_1$

অনুরূপে দেখান যায় $p=p_1$, অতএব x এবং y-এর কেবলমাত্র একটি করিয়া মান আছে যাহাদের দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় যুগপৎ সিদ্ধ হইবে। সুতরাং সমীকরণদ্বয় সহ-সমীকরণ।

উপপাদ্য : $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_1=0$ সমীকরণদ্বয় সহ-সমীকরণ হইলে $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

প্রমাণ : মনে কর, $a_1b_2-a_2b_1=0$ $\therefore$ $a_1b_2=a_2b_1$.

এখন প্রথম সমীকরণটিকে b_2 দ্বারা এবং দ্বিতীয় সমীকরণটিকে b_1 দ্বারা গুণ করিয়া পাওয়া যায়। $a_1b_2x+b_1b_2y+c_1b_2=0$

$a_2b_1x+b_1b_2y+c_2b_1=0$

বা, $a_1b_2x+b_1b_2y+c_1b_2=0$

$a_1b_2x+b_1b_2y+c_2b_1=0 \quad (\because \; a_1b_2=a_2b_1)$

এখন $c_1b_2=c_2b_1$ হইলে সমীকরণদ্বয় পরস্পর নির্ভরশীল সমীকরণ হইবে।

আবার $c_1b_2 \neq c_2b_1$ হইলে সমীকরণদ্বয় অসঙ্গত সমীকরণ হইবে।

অতএব, সমীকরণদ্বয় সহ-সমীকরণ হইলে $a_1b_2-a_2b_1$ শূন্য হইতে পারে না।

47. দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট একঘাত সহ-সমীকরণের সমাধান প্রণালী পূর্ববর্তী শ্রেণীতে শেখান হয়। এক্ষেত্রে পূর্বোক্ত সহ-সমীকরণের সমাধান প্রণালী ছাড়াও তিনটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট একঘাত সহ-সমীকরণের সমাধান প্রণালীর আলোচনা করা হইবে। সাধারণতঃ (i) **পরিবর্ত** (Substitution), (ii) **অপনয়ন** (Elimination) এবং (iii) **বজ্রগুণন** (Cross-multiplication)—এই তিন প্রকার প্রণালীর দ্বারা একঘাত সহ-সমীকরণগুলিকে সমাধান করা হয়। নিম্নে পদ্ধতিগুলির প্রয়োগ দেখান হইল।

48. **পরিবর্ত প্রণালী** (Method of Substitution) : বিশেষ করিয়া দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট একঘাত সহ-সমীকরণের সমাধানের ক্ষেত্রে এই প্রণালীটি প্রয়োগ করা হয়। এখানে সমীকরণদ্বয়ের যে-কোনটি হইতে একটি অজ্ঞাত রাশিকে অপর অজ্ঞাত রশির দ্বারা প্রকাশ করিলে প্রথমোক্ত অজ্ঞাত রাশিটির যে মান পাওয়া যায়, সেই মানটিকে দ্বিতীয় সমীকরণটিতে বসাইয়া সরল করিলে দ্বিতীয় অজ্ঞাত রাশিটির মান পাওয়া যাইবে। উক্ত মানকে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের যে-কোন একটিতে বসাইলে অপর অজ্ঞাত রাশিটির মান বাহির হইয়া আসিবে। যেমন,

উদা. 1. সমাধান কর : $7x-3y=31 \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$

$9x-5y=41 \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$

(i) সমীকরণ হইতে পক্ষান্তর করিয়া, $7x=31+3y$

বা $x=\frac{31+3y}{7}$

(ii) সমীকরণে x-এর মান বসাইয়া,

$9\left\{\frac{31+3y}{7}\right\}-5y=41$

বা, $279+27y-35y=287$

বা $-8y=8 \quad \therefore \; y=-1.$

এখন (i)-এ $y=-1$ বসাইয়া, $7x-3(-1)=31$

বা, $7x=28 \quad \therefore \; x=4.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=4$ এবং $y=-1$.

49. **অপনয়ন প্রণালী** (Method of Elimination) : যদি প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের মাত্র দুইটি অজ্ঞাত রাশি থাকে তবে সমীকরণ দুইটিকে প্রথমে এমন দুইটি সংখ্যা দ্বারা গুণ করিতে হইবে যাহাতে লব্ধ সমীকরণদ্বয়ের প্রত্যেকটিতে এই

অজ্ঞাত রাশির সহগ সমান হয়। অতঃপর শেষোক্ত সমীকরণদ্বয়কে যোগ অথবা বিয়োগ করিলে একটি অজ্ঞাত রাশিযুক্ত সমীকরণ পাওয়া যায়। উক্ত সমীকরণ হইতে অজ্ঞাত রাশিটির মান বাহির করিয়া প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের যে-কোন একটিতে ঐ মান বসাইয়া অপর অজ্ঞাত রাশিটির মান নির্ণয় করা হয়।

সমীকরণে তিনটি অজ্ঞাত রাশি থাকিলে প্রদত্ত সমীকরণত্রয়ের যে-কোন দুইটি হইতে কোন একটি অজ্ঞাত রাশিকে অপনয়ন করিতে হইবে। পরে উহাদের মধ্য হইতে অপর দুইটি সমীকরণ লইয়া একই প্রক্রিয়ার দ্বারা সমীকরণ দুইটি হইতে একই অজ্ঞাত রাশিটিকে অপনয়ন করিতে হইবে। ইহার ফলে যে দুইটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে তাহারা অবশ্যই দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সমীকরণ হইবে। এই সমীকরণদ্বয় হইতে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের মান বাহির করিয়া ঐ মান প্রদত্ত সমীকরণ তিনটির যে-কোন একটিতে বসাইলে তৃতীয় অজ্ঞাত রাশিটির মান পাওয়া যাইবে। যেমন,

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $acx+by=c \quad \cdots \text{(i)}$

$$a^2x+cy=a+1 \quad \cdots \text{(ii)}$$

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় সহ-সমীকরণ বলিয়া $acc-a^2b\neq 0$

অর্থাৎ $a(c^2-ab)\neq 0$; সুতরাং $a\neq 0$ এবং $c^2-ab\neq 0$.

(i)-কে a দ্বারা গুণ করিয়া, $a^2cx+aby=ac \quad \cdots \text{(iii)}$

(ii)-কে c দ্বারা গুণ করিয়া, $a^2cx+c^2y=ac+c \quad \text{(iv)}$

এখন {(iv) − (iii)} করিয়া $c^2y-aby=c$

বা, $y(c^2-ab)=c \quad \therefore \quad y=\dfrac{c}{c^2-ab}$

$\therefore$ (ii) সমীকরণে y-এর মান বসাইয়া,

$$a^2x+c\left(\frac{c}{c^2-ab}\right)=a+1$$

বা, $a^2(c^2-ab)x+c^2=ac^2-a^2b+c^2-ab$

বা, $a^2(c^2-ab)x=a(c^2-ab-b)$

$$\therefore \quad x=\frac{a(c^2-ab-b)}{a^2(c^2-ab)}=\frac{c^2-cb-b}{a(c^2-ab)}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=\dfrac{c^2-ab-b}{a(c^2-ab)}$; $y=\dfrac{c}{c^2-ab}$.

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $x+5y+z=0 \quad \cdots \text{(i)}$

$$ax+2y \quad =a^2 \quad \cdots \text{(ii)}$$

$$3y-az \quad =a^2 \quad \cdots \text{(iii)}$$

(i)-কে a দ্বারা গুণ করিয়া, $ax+5ay+az=0 \quad \cdots \text{(iv)}$

(ii) হইতে (iv) বিয়োগ করিয়া, $ax+2y-ax-5ay-az=a^2$

বা, $2y-5ay-az=a^2 \quad \cdots \text{(v)}$

(v) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া, $2y-5ay-az-3y+az=0$

বা, $-5ay-y=0$

বা, $-(5a+1).y=0 \quad \therefore \quad y=0.$

এখন (iii) সমীকরণে $y=0$ বসাইয়া, $3.0-az=a^2$

বা, $-az=a^2 \quad \therefore \quad z=-a.$

আবার (ii) সমীকরণে $y=0$ বসাইয়া $ax=a^2 \quad \therefore \quad x=a.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=a, y=0$ এবং $z=-a.$

বিঃ দ্রঃ যদি $a=0$ বা, $a=-\frac{1}{5}$ হয় তবে প্রদত্ত সমীকরণগুলি সহ-সমীকরণ থাকিবে না। কারণ উল্লিখিত ক্ষেত্রে সমীকরণগুলি পরস্পর নিরপেক্ষ নয়।

50. বজ্রগুণন উপপাদ্য (Theorem of cross multiplication) **:**

যদি $a_1x+b_1y+c_1z=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2z=0$ হয় তবে,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}$$ হইবে।

প্রমাণ : প্রথম সমীকরণকে c_2 এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে c_1 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$c_2a_1x+c_2b_1y+c_2c_1z=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$c_1a_2x+c_1b_2y+c_1c_2z=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া,

$$(c_2a_1-c_1a_2)x+(c_2b_1-c_1b_2)y=0$$

বা, $-(c_1a_2-c_2a_1)x=-(c_2b_1-c_1b_2)y$

$$\therefore \frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

আবার প্রথম সমীকরণকে a_2 দ্বারা এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে a_1 দ্বারা গুণ করিয়া

$$a_2a_1x+a_2b_1y+a_2c_1z=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

$$a_1a_2x+a_1b_2y+a_1c_2z=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

এখন (iv) হইতে (v) বিয়োগ করিয়া

$$(a_2b_1-a_1b_2)y+(a_2c_1-a_1c_2)z=0$$

বা, $-(a_1b_2-a_2b_1)y=-(a_2c_1-a_1c_2)z$

বা, $$\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1} \quad \cdots \quad \text{(vi)}$$

(iii) এবং (iv) হইতে,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

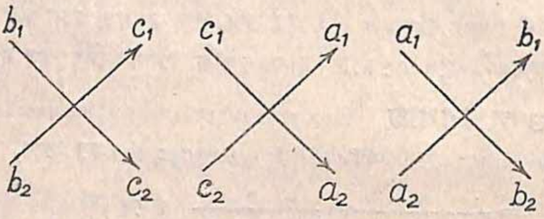
দ্রষ্টব্য : (1) উপরের উপপাদ্যটিতে $z=1$ বসাইলে নিম্নলিখিত অনুসিদ্ধান্তটি পাওয়া যায়।

যদি $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ হয়, তবে

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$\therefore \quad x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ এবং } y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

(২) x, y এবং z-এর নীচে যে রাশিমালাগুলি আছে তাহাদের মনে রাখিবার জন্যে নিম্নলিখিত পদ্ধতি অবলম্বন করিবে।



প্রথমে প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সহগগুলিকে উল্লিখিত উপায়ে লিখিয়া লও। অতঃপর প্রতি চিত্রের নিম্নগামী গুণফলটি হইতে ঊর্ধ্বগামী গুণফলকে বিয়োগ করিয়া প্রাপ্ত রাশিগুলিকে যথাক্রমে x, y এবং z-এর নীচে স্থাপন কর।

উদা. 4. সমাধান কর : $4x-3y-7=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (i)

$6x+2y-4=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (ii)

(i) এবং (ii) বজ্রগুণনের দ্বারা,

$$\frac{x}{(-3)(-4)-2(-7)}=\frac{y}{(-7).6-(-4).4}=\frac{1}{4.2-6(-3)}$$

বা, $\dfrac{x}{12+14}=\dfrac{y}{-42+16}=\dfrac{1}{8+18}$

বা, $\dfrac{x}{26}=\dfrac{y}{-26}=\dfrac{1}{26}$

$\therefore \quad \dfrac{x}{26}=\dfrac{1}{26}$ এবং $\dfrac{y}{-26}=\dfrac{1}{26}$

$\therefore \quad x=1$ এবং $y=-1$; ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

উদা. 5. সমাধান কর : $6x+7y-13z=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (i)

$11x-2y-9z=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (ii)

$2x+3y+\ z=30 \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (iii)

(i) এবং (ii) হইতে বজ্রগুণনের দ্বারা,

$$\frac{x}{7(-9)-(-2)(-13)}=\frac{y}{-13.11-(-9).6}=\frac{z}{6(-2)-11.7}$$

বা, $\frac{x}{-63-26}=\frac{y}{-143+54}=\frac{z}{-12-77}$

বা, $\frac{x}{-89}=\frac{y}{-89}=\frac{z}{-89}$ বা, $x=y=z$

(iii) সমীকরণে y এবং z-এর পরিবর্তে x বসাইয়া,

$2x+3x+x=30$ বা, $6x=30$; $\therefore$ $x=5$

$\therefore$ $y=5$ এবং $z=5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=5$, $y=5$ এবং $z=5$.

উদা. 6. সমাধান কর : $x+y+z=(a-b)(b-c)(c-a)$ ... (i)

$ax+by+cz=0$ ... ... (ii)

$a^2x+b^2y+c^2z=0$ ... ... (iii)

(ii) এবং (iii) হইতে বজ্রগুণনের দ্বারা,

$\frac{x}{bc^2-b^2c}=\frac{y}{ca^2-c^2a}=\frac{z}{ab^2-a^2b}=k$ (ধর)

$\therefore$ $x=k(bc^2-b^2c)$, $y=k(ca^2-c^2a)$ এবং $z=k(ab^2-a^2b)$.

এখন (i) সমীকরণে x, y ও z-এর উপরোক্ত মানগুলি বসাইয়া,

$k(bc^2-b^2c)+k(ca^2-c^2a)+k(ab^2-a^2b)=(a-b)(b-c)(c-a)$

বা, $-kbc(b-c)-kca(c-a)-kab(a-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$

বা, $-k\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}=(a-b)(b-c)(c-a)$

বা, $k(a-b)(b-c)(c-a)=(a-b)(b-c)(c-a)$ ... (iv)

[$\because$ $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$]

$\therefore$ (iv) হইতে, $k=1$

$\therefore$ $x=bc^2-b^2c$, $y=ca^2-c^2a$ এবং $z=ab^2-a^2b$; ইহাই নির্ণেয় সমাধান।

বিঃ দ্রঃ যদি $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ হয় তবে (iv) হইতে দেখা যায় $k.0=0$, এক্ষেত্রে k-এর অসংখ্য মান থাকিতে পারে। এমতাবস্থায় x, y, z-এর অসংখ্য মান দ্বারা সমীকরণগুলি সিদ্ধ হইবে। কিন্তু প্রদত্ত সমীকরণগুলি সহ-সমীকরণ বলিয়া x y, z-এর নির্দিষ্ট সংখ্যক মান আছে। অতএব, $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$।

51. বিবিধ উদাহরণ :

উদা. 7. সমাধান কর : $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$ ... ... (i)

$\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=2$ ... ... (ii)

$\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=5$ ... ... (iii)

(i), (ii) এবং (iii) যোগ করিয়া,

$2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=8$ বা, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=4$ ... (iv)

(iv) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া, $\frac{c}{z}=3$ $\therefore$ $z=\frac{c}{3}$

(iv) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া, $\frac{a}{x}=2$ $\therefore$ $x=\frac{a}{2}$

(iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া, $\frac{b}{y}=-1$ $\therefore$ $y=-b$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=\frac{a}{2}$, $y=-b$ এবং $z=\frac{c}{3}$

8. সমাধান কর : $\frac{3}{y}-\frac{2}{x}=1$ ... (i)

$\frac{5}{z}+\frac{3}{y}=8$ ... (ii)

$\frac{4}{x}+\frac{7}{z}=11$ ... (iii)

এখন (i), (ii) এবং (iii) সমীকরণে

$\frac{1}{x}=k$, $\frac{1}{y}=l$ এবং $\frac{1}{z}=m$ বসাইয়া,

$3l-2k=1$ ... ... (iv)

$5m+3l=8$ ... ... (v)

$4k+7m=11$ ... ... (vi)

এখন (v) হইতে (iv) বিয়োগ করিয়া, $5m+3l-3l+2k=7$

বা, $5m+2k=7$ ... ... (vii)

(vii)-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল হইতে (vi) বিয়োগ করিয়া,

$10m+4k-4k-7m=3$

বা, $m=1$; বা, $\frac{1}{z}=1$ $\therefore$ $z=1$,

এখন (ii) সমীকরণে $z=1$ বসাইয়া, $5y+3.1=8y.1$

বা, $3y=3$ $\therefore$ $y=1$

আবার (i) সমীকরণে $y=1$ বসাইয়া, $3x-2.1=x.1$.

বা, $2x=2$ $\therefore$ $x=1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=1$, $y=1$ এবং $z=1$.

উদা. 9. সমাধান কর : $x+y-z=2$ ...... (i)

$5x+2y-z=3$ ...... (ii)

$-2x-6y+5z=10$ ...... (iii)

(ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া, $4x+y=1$ বা, $4x+y-1=0 \cdots\cdots$ (iv)

(i)-কে 5 দ্বারা গুণ করিয়া, $5x+5y-5z=10 \cdots$(v)

(v) এবং (iii) যোগ করিয়া, $3x-y=20$ বা, $3x-y-20=0\cdots$(vi)

(iv) এবং (vi) হইতে

$$\frac{x}{1(-20)-(-1)(-1)}=\frac{y}{(-1).3-(-20).4}=\frac{1}{4(-1)-3.1}$$

বা, $\frac{x}{-20-1}=\frac{y}{-3+80}=\frac{1}{-4-3}$

বা, $\frac{x}{-21}=\frac{y}{77}=\frac{1}{-7}$ $\therefore$ $x=3$ এবং $y=-11$

এখন (i) সমীকরণে x এবং y-এর মান বসাইয়া,

$3+(-11)-z=2$ বা, $-8-z=2$ $\therefore$ $z=-10$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x=3$, $y=-11$ এবং $z=-10$.

উদা. 10. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2$ এবং $\frac{5}{x}+\frac{10}{y}=5\frac{5}{6}$ হইলে দেখাও যে, $x^2+2y=10$

উঃ $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2\cdots$(i) $\frac{5}{x}+\frac{10}{y}=\frac{35}{6}\cdots\cdots$(ii)

(ii)-এর উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{7}{6}\cdots\cdots$(iii)

(iii)-এর উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া, $\frac{2}{x}+\frac{4}{y}=\frac{7}{3}\cdots\cdots$(iv)

(iv) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া, $\frac{4}{y}-\frac{3}{y}=\frac{7}{3}-2$ বা, $\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$ $\therefore$ $y=3$

(i) এ $y=3$ বসাইয়া, $\frac{2}{x}+\frac{3}{3}=2$ বা, $\frac{2}{x}=1$ $\therefore$ $x=2$

$\therefore$ $x^2+2y=(2)^2+2\,.\,3=10.$

উদা. 11. সমাধান কর : $\frac{x+2a}{b+c}=\frac{y+2b}{c+a}=\frac{z+2c}{a+b}$; $x+y+z=0$.

উঃ মনে কর, $\frac{x+2a}{b+c}=\frac{y+2b}{c+a}=\frac{z+2c}{a+b}=k$

$\therefore$ $x=k(b+c)-2a$, $y=k(c+a)-2b$ এবং $z=k(a+b)-2c$

আবার, $x+y+z=0$

বা, $k(b+c)-2a+k(c+a)-2b+k(a+b)-2c=0$

বা, $k(b+c+c+a+a+b)-(2a+2b+2c)=0$

বা, $(2a+2b+2c)k=(2a+2b+2c)$

$\therefore$ $k=1$

[যদি $(2a+2b+2c)=0$ হয়, তবে $k \cdot 0=0$; এক্ষেত্রে k-এর অসংখ্য মান পাওয়া যাইবে। ইহার ফলে, x, y. z-এরও অসংখ্য মান পাওয়া যাইবে। কিন্তু প্রদত্ত সমীকরণগুলি x, y এবং z-এর একঘাত সহ সমীকরণ বলিয়া ইহা অসম্ভব। অতএব, $(2a+2b+2c)\neq 0$.]

$$\therefore\quad x=k(b+c)-2a=1(b+c)-2a=b+c-2a$$
$$y=k(c+a)-2b=1(c+a)-2b=c+a-2b$$
$$z=k(a+b)-2c=1(a+b)-2c=a+b-2c.$$

প্রশ্নমালা 17

সমাধান কর :

1. $\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ 3x+5y=27 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=9 \\ x+3y=10 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r} 8x-5y+\frac{1}{15}=0 \\ 3y=5x \end{array}\right\}$

4. $x+2y=3=4x-y$

5. $x-3y=3x-10y=1$

6. $\left.\begin{array}{r} 2(x-y)=3 \\ 5x+8y=14 \end{array}\right\}$ [S. F. '66]

7. $\left.\begin{array}{r} 6y-x=1 \\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{r} x+5y=36 \\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{3} \end{array}\right\}$

9. $a(x+y)=6(x-y)=2ab$

10. $\left.\begin{array}{r} 3x+4y=11 \\ 5x-2y=1 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{r} 5x-3y=1 \\ 5y-3x=9 \end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{r} 5x-3y=24 \\ 4x+5y=71 \end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{r} x+y-3=0 \\ 4x-5y+6=0 \end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{r} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{r} 25x+27y=131 \\ 27x+25y=129 \end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{r} 17x-18y+19=0 \\ 23x-24y+25=0 \end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{r} 2x+\dfrac{3}{y}=5 \\ 5x-\dfrac{2}{y}=3 \end{array}\right\}$ [S. F. '70]

18. $\left.\begin{array}{r} \dfrac{5}{x}+3y=8 \\ \dfrac{4}{x}-10y=56 \end{array}\right\}$

19. $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=2 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{3} \end{array}\right\}$

20. $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{11}{30} \end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{array}{r} \dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{y}=30 \\ \dfrac{9}{x}=2+\dfrac{5}{y} \end{array}\right\}$

22. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{7y}{11}=9\\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{5y}{22}=3\end{array}\right\}$

23. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1\\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1\end{array}\right\}$

24. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\\ ax-by=a^2-b^2\end{array}\right\}$

25. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}\,;\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=2$

26. $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}=1\,;\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=1$

27. $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=8\,;\ \dfrac{6}{y}+\dfrac{5}{x}=13$

28. $5-\dfrac{3}{y}=\dfrac{4}{x}\,;\ \dfrac{6}{x}+9=\dfrac{12}{y}$

29. $\dfrac{x-y}{y-1}=\dfrac{y+1}{x}=\frac{5}{8}$

30. $\left.\begin{array}{l}7x+\dfrac{5y+9x}{11}=17\\ 6y+\dfrac{11y+9x}{17}=21\end{array}\right\}$

31. $\dfrac{4x+3y-1}{2}-\dfrac{7x-y-8}{2}=\dfrac{8y-x+9}{17}-3\,;\ 2x+y=1$

32. $\dfrac{2x+2y-3}{5}=\dfrac{3x-7y+4}{6}=\dfrac{8y-x+2}{7}$

33. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{y-2}=3\,;\ \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y-2}=5$

34. $\dfrac{3}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=2\,;\ \dfrac{9}{x+y}-\dfrac{4}{x-y}=1$

প্রশ্নমালা 18

1. $3x+4y=27$ এবং $5x-3y=16$ হইলে $(3x-5y)$-এর মান কত?
2. $2x+y=8$ এবং $3x-2y=5$ হইলে, দেখাও যে $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=2$.
3. $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=13$ এবং $\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{y}=27$ হইলে $(3x+2y)$-এর মান নির্ণয় কর।
4. $ax+by=1$ এবং $bx+ay=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ হইলে, দেখাও যে $bx=ay$.
5. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ এবং $ax+by+cz=a^2+b^2+c^2$ হইলে, দেখাও যে $x+y+z=a+b+c$.

সমাধান কর (Solve) :

6. $\left.\begin{array}{l} y+z=6 \\ z+x=4 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=8 \\ 3y+4z=26 \\ 4z+2x=22 \end{array}\right\}$

8. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$; $\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$; $\frac{c}{z}+\frac{a}{x}=1.$

9. $\begin{array}{l} 2x+3y-5z=0 \\ 4x+5y-9z=0 \\ x+y+z=3 \end{array}$

10. $\begin{array}{l} x+6y+4z=0 \\ 7y-3x+3z=0 \\ 2z-x+2y=12 \end{array}$

11. $\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=5 \\ x-2y+3z=2 \end{array}$

12. $\begin{array}{l} 3x+2y-z=5 \\ 6x+2y-3z=0 \\ 7x+y-4z=-6 \end{array}$

13. $\begin{array}{l} 3x+2y-z=12 \\ z+4y-5z=6 \\ 2x-y+2z=6 \end{array}$

14. $\begin{array}{l} x+2y-2z=8 \\ 3x+y-3z=11 \\ 5x+3y-7z=17 \end{array}$

15. $\frac{2}{y}+\frac{3}{x}=5$; $\frac{3}{z}+\frac{4}{y}=7$; $\frac{2}{x}+\frac{1}{z}=3$

16. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$; $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{b}$; $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{c}$

17. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=2$; $\frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=1$; $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}+\frac{3}{z}=23.$

18. $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=0$; $\frac{5}{x}-\frac{6}{y}+\frac{2}{z}=0$; $2x+3y+4z=6$

19. $x+y+z=ax+by+cz=0$; $\frac{x}{b-c}+\frac{y}{a-c}+\frac{z}{a-b}=1.$

অষ্টম অধ্যায়

সহ-সমীকরণ সংক্রান্ত প্রশ্নাবলী

(Problems leading to Simultaneous equations)

পূর্ববর্তী শ্রেণীতে দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সহ-সমীকরণ বিষয়ক প্রশ্নাবলীর আলোচনা করা হইয়াছে। এস্থলে বিভিন্ন উদাহরণের সাহায্যে দুই বা তিনটি অজ্ঞাত রাশিযুক্ত প্রশ্নসমূহের সমাধান প্রণালী দেখান হইবে।

52. সংখ্যা ও ভগ্নাংশ বিষয়ক প্রশ্নাবলী :

উদা. 1. কোন দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা তাহার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 6 গুণ অপেক্ষা 7 বেশি। সংখ্যাটি হইতে 27 বিয়োগ করিলে অঙ্ক দুইটি স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি কত ?

উঃ মনে কর, সংখ্যাটির দশক এবং এককের অঙ্কগুলি যথাক্রমে x এবং y.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=10x+y$ এবং উহার অঙ্কদ্বয়ের স্থান পরিবর্তনের ফলে উৎপন্ন সংখ্যা $=10y+x$.

শর্তানুসারে, $10x+y=6(x+y)+7 \cdots\cdots$(i)

এবং $(10x+y)-27=10y+x \ldots$(ii)

(i) হইতে, $4x-5y=7 \cdots\cdots$(iii)

(ii) হইতে $9x-9y=27$ বা, $x-y=3$

বা, $x=3+y \cdots\ldots$(iv)

এখন (iv) হইতে x-এর মান (iii) সমীকরণে বসাইয়া,

$4(3+y)-5y=7$

বা, $-y=-5 \quad \therefore \quad y=5$.

$\therefore$ (iv) সমীকরণে $y=5$ বসাইয়া, $x=3+5=8$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=10x+y=10.8+5=85$.

উদা. 2. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কসমষ্টি 14 ; দশকের স্থানের অঙ্কটি অপর দুইটির সমষ্টির সমান। অঙ্কগুলিকে উল্টাইয়া লিখিলে তাহা প্রদত্ত সংখ্যা অপেক্ষা 99 কম হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, সংখ্যাটির শতক, দশক এবং এককের স্থানের অঙ্কগুলি যথাক্রমে x, y এবং z. $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=100x+10y+z$.

এই সংখ্যাটির অঙ্কগুলিকে উল্টাইয়া লিখিবার ফলে উৎপন্ন সংখ্যা

$=100z+10y+x$.

সর্তানুসারে, $100x+10y+z=(100z+10y+x)+99$

বা, $99x-99z=99$ বা, $x-z=1\cdots\cdots(i)$

অঙ্কগুলির সমষ্টি 14 বলিয়া, $x+y+z=14\cdots\cdots(ii)$

আবার দশকের স্থানের অঙ্কটি অপর অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সমান বলিয়া,

$y=x+z\cdots\cdots(iii)$

(ii)-এ $(x+z)$-এর পরিবর্তে y বসাইয়া, $2y=14$; $\therefore \; y=7.$

$\therefore$ (iii) হইতে $x+z=7\cdots\cdots(iv)$

$\therefore$ (i) এবং (iv) যোগ করিয়া, $2x=8$; $\therefore \; x=4$

এখন (ii) হইতে $4+7+z=14$; $\therefore \; z=3$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=100x+10y+z$

$=100.4+10.7+3=473.$

উদা. 3. হরের সহিত 1 যোগ করিলে কোন ভগ্নাংশের পরিমাণ $\frac{1}{3}$; কিন্তু হরের সহিত 5 যোগ করিলে ইহা $\frac{1}{4}$ হয়। ভগ্নাংশটি কত ? [H. U. '36]

উঃ মনে কর, প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\frac{x}{y}$.

হরের সহিত 1 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y+1}$ হইবে ; এবং ইহা $\frac{1}{3}$-এর সমান।

$\therefore \; \frac{x}{y+1}=\frac{1}{3}\cdots\cdots(i)$

আবার হরের সহিত 5 যোগ করিলে ভগ্নাংশটির মান $\frac{1}{4}$ হয় বলিয়া,

$\therefore \; \frac{x}{y+5}=\frac{1}{4}\cdots\cdots(ii)$

(i) হইতে $3x-y=1\cdots\cdots(iii)$; (ii) হইতে $4x-y=5\cdots\cdots(iv)$

$\therefore$ (iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া, $x=4$

এখন (iii) সমীকরণে $x=4$ বসাইয়া, $12-y=1$ বা, $y=11.$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{x}{y}=\frac{4}{11}.$

53. বয়স-সংক্রান্ত প্রশ্নাবলী :

উদা. 4. 20 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল। 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর। [C. U. '40]

উঃ মনে কর, পিতা এবং পুত্রের বর্তমান বয়স যথাক্রমে x এবং y বৎসর।

20 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ বলিয়া,

$x-20=4(y-20)$ বা, $x-4y+60=0\cdots(i)$

আবার 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ বলিয়া,

$\therefore \; x+4=2(y+4)$ বা, $x-2y=4\cdots\cdots(ii)$

(ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া $2y=64$ $\therefore$ $y=32$

এখন (ii) সমীকরণে $y=32$ বসাইয়া $x-64=4$ $\therefore$ $x=68$.

$\therefore$ পিতার বর্তমান বয়স $=68$ বৎসর ; এবং পুত্রের বর্তমান বয়স $=32$ বৎসর।

54. ক্ষেত্রফল-বিষয়ক প্রশ্নাবলী ঃ

উদা. 5. একটি আয়তকার ক্ষেত্রের প্রস্থ 1 ফুট বাড়াইলে এবং দৈর্ঘ্য 2 ফুট কমাইলে উহার ক্ষেত্রফল 24 বর্গফুট কমিয়া যায়। যদি উহার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ প্রত্যেকটি 3 ফুট করিয়া বাড়ান হয় তবে উহার ক্ষেত্রফল 231 বর্গফুট বাড়িয়া যায়। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, আয়তকার ক্ষেত্রের প্রস্থ এবং দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x এবং y ফুট।

ক্ষেত্রটির প্রস্থ 1 ফুট বাড়িলে এবং দৈর্ঘ্য 2 ফুট কমিলে উহার ক্ষেত্রফল 24 বর্গফুট কমিয়া যায়।

$\therefore$ $(x+1)(y-2)=xy-24$

বা, $2x-y=22\cdots\cdots$(i)

আবার উহার দৈর্ঘ্য $(y+3)$ এবং প্রস্থ $(x+3)$ ফুট হইলে ক্ষেত্রফল 231 বর্গফুট বাড়িয়া যায়।

$\therefore$ $(x+3)(y+3)=xy+231$

বা, $3x+3y=222$ বা, $x+y=74\cdots\cdots$(ii)

এখন (i) এবং (ii) যোগ করিয়া, $3x=96$ $\therefore$ $x=32$

$\therefore$ (ii) সমীকরণে $x=32$ বসাইয়া $32+y=74$ $\therefore$ $y=42$

$\therefore$ ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য $=42$ ফুট এবং প্রস্থ $=32$ ফুট।

55. সময় ও দূরত্ব-বিষয়ক প্রশ্নাবলী ঃ

উদা. 6. একজন লোক কোন নির্দিষ্ট দূরত্ব নির্দিষ্ট বেগে অতিক্রম করে। যদি সে ঘণ্টায় 2 কি. মি. বেশি যায় তবে তাহার পূর্বের সময়ের $\frac{4}{5}$ গুণ সময় লাগে ; কিন্তু ঘণ্টায় $\frac{1}{2}$ কি. মি. কম গেলে তাহার $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা সময় বেশি লাগে। দূরত্বটি নির্ণয় কর। [Paj. '08]

উঃ মনে কর, লোকটি ঘণ্টায় x কি. মি. বেগে y কি. মি. দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore$ y কি. মি. দূরত্ব অতিক্রম করিতে প্রয়োজনীয় সময় $=\frac{y}{x}$ ঘণ্টা ; লোকটির বেগ $(x+2)$ কি. মি. হইলে সে উক্ত দূরত্ব $\frac{4}{5}\left(\frac{y}{x}\right)$ ঘণ্টায় অতিক্রম করে বলিয়া,

$$\frac{y}{x+2}=\frac{4y}{5x} \quad \text{বা,} \quad 5xy=4xy+8y$$

বা, $xy=8y$ $\therefore$ $x=8$ [এখানে y দূরত্ব বলিয়া শূন্য নহে।]

আবার লোকটি $(x-\frac{1}{2})$ কি. মি. বেগে চলিলে একই দূরত্ব অতিক্রম করিতে তাহার $\left(\frac{y}{x}+2\frac{1}{2}\right)$ ঘণ্টা সময় লাগে।

∴ শর্তানুসারে, $\frac{y}{x-\frac{1}{2}}=\frac{y}{x}+2\frac{1}{2}$

বা, $\frac{y}{(\frac{15}{2})}=\frac{y}{8}+\frac{5}{2}$ [সমীকরণে $x=8$ বসাইয়া]

বা, $\frac{2y}{15}-\frac{y}{8}=\frac{5}{2}$

বা, $16y-15y=300$ ∴ $y=300$

∴ নির্ণেয় দূরত্ব $=300$ কি. মি.।

56. **বিবিধ উদাহরণ ঃ**

উদা. 7. একখানি নৌকা 10 ঘণ্টায় স্রোতের প্রতিকূলে 30 কি. মি. গিয়া 44 কি. মি. ফিরিয়া আসিতে পারে। কিন্তু 13 ঘণ্টায় স্রোতের প্রতিকূলে 40 কি. মি. গিয়া 55 কি. মি. ফিরিয়া আসে। নৌকার গতি ও স্রোতের বেগ বাহির কর।

উঃ মনে কর, স্থির জলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় x কি. মি. এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় y কি. মি.।

∴ স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় $(x+y)$ কি. মি. এবং স্রোতের প্রতিকূলে উহার বেগ ঘণ্টায় $(x-y)$ কি. মি.।

∴ 30 কি. মি. প্রতিকূলে যাইতে সময় লাগে $\frac{30}{x-y}$ ঘণ্টা এবং 44 কি. মি. অনুকূলে ফিরিয়া আসিতে সময় লাগে $\frac{44}{x+y}$ ঘণ্টা।

∴ প্রশ্নানুসারে, $\frac{30}{x-y}+\frac{44}{x+y}=10$......(ii)

অনুরূপে দ্বিতীয় সর্ত হইতে, $\frac{40}{x-y}+\frac{55}{x+y}=13$ ......(ii)

এখন (i)-কে 4 দ্বারা এবং (ii)-কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া,

$\frac{120}{x-y}+\frac{176}{x+y}=40$......(iii)

$\frac{120}{x-y}+\frac{165}{x+y}=39$......(iv)

(iii) হইতে (iv) বিয়োগ করিয়া, $\frac{11}{x+y}=1$

বা, $x+y=11$......(v)

এখন (i) সমীকরণে $x+y=11$ বসাইয়া,

$$\frac{30}{x-y}+4=10$$

বা, $6(x-y)=30$

$\therefore\ x-y=5\cdots\cdots$(iv)

$\therefore$ (v) এবং (vi) যোগ করিয়া, $2x=16$, $\therefore\ x=8$

$\therefore$ (v) সমীকরণে $x=8$ বসাইয়া, $8+y=11$; $\therefore\ y=3$

$\therefore$ নৌকার বেগ ঘণ্টায় 8 কি. মি. এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 কি. মি.

উদা. 8. এক ব্যক্তি 4টা ও 5টার মধ্যে বাহির হইয়া 5টা ও 6টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিল যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি স্থান বিনিময় করিয়াছে। সে কখন বাহির হইয়াছিল এবং কখন ফিরিয়া আসিয়াছিল ?

উঃ মনে কর, ঐ ব্যক্তি 4টা x মিনিটের সময় বাহির হইয়াছিল এবং 5টা y মিনিটের সময় ফিরিয়া আসিয়াছিল। এখন 4টা x মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা এবং ঘণ্টার কাঁটা XII-চিহ্ন হইতে যথাক্রমে x মিনিট-ঘর এবং $\left(20+\frac{x}{12}\right)$ মিনিট-ঘর দূরে থাকে।

আবার 5টা y মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা এবং ঘণ্টার কাঁটা XII-চিহ্ন হইতে যথাক্রমে y মিনিট-ঘর এবং $\left(25+\frac{y}{12}\right)$ মিনিট-ঘর দূরে থাকে।

শর্তানুসারে, $x=25+\frac{y}{12}$ বা, $12x=300+y$

বা, $y=12x-300\cdots\cdots$(i)

এবং $y=20+\frac{x}{12}$ বা, $12y=240+x\cdots\cdots$(ii)

এখন (i) হইতে y এর মান (ii)-এ বসাইয়া,

$$12(12x-300)=240+x$$

বা, $144x-3600=240+x$ বা, $143x=3840$

$\therefore\ x=26\frac{122}{143}$

আবার (i)-এ $x=\frac{3840}{143}$ বসাইয়া

$y=12\left(\frac{3840}{143}\right)-300$

$=\frac{3180}{143}=22\frac{34}{143}$

$\therefore$ ঐ ব্যক্তি 4টা $26\frac{122}{143}$ মিনিটের সময় বাহির হইয়া 5টা $22\frac{34}{143}$ মিনিটের সময় ফিরিয়া আসিয়াছিল।

প্রশ্নমালা 19

1. (a) 375 টাকায় যদি 4টি কোট এবং 7টি সার্ট অথবা 5টি কোট এবং 5টি সার্ট কেনা যায় তবে প্রত্যেকটির দাম কত? [S. F. '58]

(b) এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে 10 ঘণ্টায় 70 কি. মি. নৌকা বাহিয়া গিয়া 70 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। ঘণ্টায় স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

2. এমন একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর, যাহার হরের সহিত 1 যোগ করিলে $\frac{1}{2}$ হয় এবং যাহার লব হইতে 2 বিয়োগ করিলে $\frac{1}{3}$ হয়। [S. F. '63]

3. যদি দুই অঙ্ক বিশিষ্ট কোন সংখ্যা উহার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 4 গুণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ঐ অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া লিখিলে উৎপন্ন সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 7 গুণ হইবে। [S. F. '56]

4. একটি দুই অঙ্ক-বিশিষ্ট সংখ্যা উহার অঙ্ক দুইটির সমষ্টির 4 গুণ। ঐ সংখ্যাটির সহিত 18 যোগ করিলে অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি কত?

5. কোন ভগ্নাংশের লবকে দ্বিগুণ করিয়া হরের সহিত 1 যোগ করিলে $\frac{1}{2}$-এর সমান হয় এবং হরকে দ্বিগুণ করিয়া লবের সহিত 1 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{6}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। [S. F. '69]

6. এমন তিনটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাতে প্রথমটি ও দ্বিতীয়টির সমষ্টি 45, দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির সমষ্টি 55 এবং তৃতীয় ও প্রথমটির 3 গুণের সমষ্টি 90; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

7. 77-কে এমন তিনটি অংশে ভাগ কর যাহাতে প্রথম ও দ্বিতীয় অংশের সমষ্টিকে 3 দ্বারা গুণ করিলে, দ্বিতীয় ও তৃতীয় অংশের সমষ্টি হইতে 3 বিয়োগ করিলে এবং প্রথম ও তৃতীয় অংশের সমষ্টির সহিত 3 যোগ করিলে পরস্পর সমান হইবে।

8. তিন অঙ্কের কোন সংখ্যার অঙ্ক তিনটির সমষ্টি 10 এবং মধ্যস্থলের অঙ্কটি অন্য অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সমান। প্রথম ও তৃতীয় অঙ্কদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করিলে সংখ্যাটি 99 বাড়িয়া যায়; সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C. U. '23]

9. তিন অঙ্কের কোন সংখ্যার অঙ্কগুলি উল্টাইয়া গেলেও সংখ্যাটি অপরিবর্তিত থাকে। অঙ্ক তিনটির সমষ্টি 17 এবং প্রথম অঙ্ক দুইটির অন্তর 4; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

10 পিতা এবং তাহার দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টি 52 বৎসর। একটি পুত্র অন্যটি হইতে 3 বৎসরের বড়। বড় ছেলেটির বয়স যখন পিতার বর্তমান বয়সের সমান হইবে, তখন তাহাদের তিনজনের বয়সের সমষ্টি 136 বৎসর হইবে। তাহাদের প্রত্যেকের বর্তমান বয়স কত?

11. 10 জন লোক এবং 15 জন বালক কোন কাজ 2 দিনে করিতে পারে। 4 জন লোক এবং 9 জন বালক উক্ত কাজটি 4 দিনে করে। কতদিনে 1 জন লোক অথবা 1 জন বালক কাজটি করিতে পারিবে?

12. একটি আয়তকার প্রাঙ্গণের পরিসীমা 60 ফুট। উহার দৈর্ঘ্য 3 ফুট

বাড়াইয়া প্রস্থ 3 ফুট কমাইলে ক্ষেত্রফল 21 বর্গফুট কমিয়া যায়। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

13. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর এমন একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান যাহার দৈর্ঘ্য উহা অপেক্ষা 10 মিটার কম এবং প্রস্থ 4 মিটার বেশি। যদি আয়তক্ষেত্রটি অপর আর একটি আয়তক্ষেত্রের সমান হয় ; যাহার দৈর্ঘ্য উহা অপেক্ষা 4 মিটার কম এবং প্রস্থ 1 মিটার বেশি, তবে আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ নির্ণয় কর।

14. একটি লোকের দুইটি ঘোড়া এবং একটি 75 টাকা মূল্যের জিন আছে। যদি জিনটি প্রথম ঘোড়ার উপর রাখা হয় তবে তাহার মূল্য অন্যটির দ্বিগুণ হয়। যদি জিনটি দ্বিতীয় ঘোড়ার উপর রাখা হয় তবে তাহার মূল্য প্রথমটি অপেক্ষা 660 টাকা কম হয়। প্রত্যেক ঘোড়ার মূল্য কত ?

15. একটি লোক ঘণ্টায় a কি. মি. বেগে A ও B-এর মধ্যবর্তী দূরত্বের এক-তৃতীয়াংশ অতিক্রম করে এবং অবশিষ্ট দূরত্ব সে ঘণ্টায় $2b$ কি. মি. বেগে অতিক্রম করে। যদি সে ঘণ্টায় $3c$ কি. মি. বেগে চলে, তবে সে সমান সময়ে A হইতে B-তে আসিয়া পুনরায় ফিরিয়া যাইতে পারে। প্রমাণ কর যে, $\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

16. একজন লোক কোন নির্দিষ্ট দূরত্ব নির্দিষ্ট সময়ে অতিক্রম করিতে পারে। যদি সে ঘণ্টায় 2 কি. মি. কম যায়, তবে গন্তব্যস্থলে পৌঁছাইতে তাহার $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা সময় বেশি লাগে ; কিন্তু ঘণ্টায় 6 কি. মি. বেশি গেলে সে নির্দিষ্ট সময়ের $\frac{5}{8}$ গুণ সময়ে ঐ স্থানে যাইতে পারে। দূরত্বটি নির্ণয় কর।

17. 220 ফুট এবং 275 ফুট দৈর্ঘ্যের দুইটি ট্রেন সমান্তরাল পথে চলে। যদি তাহারা একই দিকে যায় তবে তাহারা পরস্পরকে $22\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডে এবং যদি তাহারা বিপরীত দিকে যায় তবে তাহারা পরস্পরকে $4\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডে অতিক্রম করে। ট্রেন দুইটির বেগ মাইল প্রতি ঘণ্টায় বাহির কর।

18. একটি ট্রেন 1 ঘণ্টা চলিবার পর দুর্ঘটনা করিল এবং 1 ঘণ্টা দেরী করিল। ইহার পর সে পূর্বের বেগের $\frac{3}{5}$ বেগে যাত্রা করিল এবং 3 ঘণ্টা পরে পৌঁছাইল। যদি দুর্ঘটনাটি আরও 50 কি. মি. পরে ঘটিত তবে সে আরও 1 ঘণ্টা 20 মিনিট পূর্বে পৌঁছাইত। পথের দৈর্ঘ্য এবং ট্রেনের সঠিক বেগ নির্ণয় কর ? [Pat. '18]

19. ঘোড়া সমেত একখানি গাড়ী 800 টাকা মূল্যে বিক্রয় করায় এক ব্যক্তি ঘোড়ার মূল্যের 10% এবং গাড়ীর মূল্যের 20% লাভ করিল। ঘোড়ার মূল্যের 15% এবং গাড়ীর মূল্যের 25% লাভ হয় এইরূপ দামে যদি সে উহা বিক্রয় করিত তাহা হইলে সে পূর্বাপেক্ষা 35 টাকা বেশি পাইত। ঘোড়া এবং গাড়ীর মূল্য নির্ণয় কর।

20. কোন ক্রিকেট খেলায় একজন ঠিকাদার $12\frac{1}{2}\%$ লাভে 24 জন খেলোয়াড়ের জন্য খাদ্য সরবরাহের চুক্তি করিল ; কিন্তু 3 জন খেলোয়াড় অনুপস্থিত থাকায়

অবশিষ্ট খেলোয়াড়গণ নির্ধারিত মূল্য দিয়াছিল। ইহাতে ঐ ঠিকাদারের মোট 2 টাকা লোকসান হইল। ঐ ঠিকাদার প্রত্যেক খেলোয়াড়ের জন্য কত করিয়া মূল্য ধার্য করিয়াছিল।

21. একটি নৌকা স্রোতের প্রতিকূলে 30 কি. মি. গিয়া 8 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিতে পারে। ইহা স্রোতের প্রতিকূলে 45 কি. মি. এবং অনুকূলে 60 কি. মি. 13 ঘণ্টায় অতিক্রম করিতে পারে। স্থির জলে নৌকার বেগ এবং স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

22. এক ব্যক্তি একদিন বৈকালে 3টা ও 4টার মধ্যে বাড়ী হইতে বাহির হইয়া সন্ধ্যা 6টা ও 7টার মধ্যে বাড়ীতে ফিরিয়া আসিয়া দেখিলেন যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি স্থান বিনিময় করিয়াছে। তিনি কখন বাহির হইয়াছিলেন এবং কতক্ষণ বাড়ীর বাহিরে ছিলেন ?

23. জলে ওজন করিলে টিনের এক-সপ্তমাংশ ওজন কমিয়া যায় ; কিন্তু সীসার এক-দশমাংশ ওজন কমে। টিন ও সীসা একত্রে মিশ্রিত করিয়া দেখা গেল মিশ্রিত জিনিসের ওজন 270 পাউণ্ড, কিন্তু জলে ওজন করিয়া দেখা গেল ইহা 240 পাউণ্ড। কি পরিমাণ টিন ও কি পরিমাণ সীসার মিশ্রণ করা হইয়াছিল ?

24. যখন চালের দর প্রতি কুইণ্টাল 120 টাকা তখন একটি পরিবারের খরচ 1400 টাকা ; কিন্তু চাউলের দাম কুইণ্টাল প্রতি 30 টাকা বৃদ্ধি পাইলে ঐ পরিবারের খরচ 1550 টাকা। চাউলের দাম কুইণ্টাল প্রতি 45 টাকা হ্রাস পাইলে পরিবারটির খরচ কত হইবে ? (পরিবারটির অন্যান্য খরচ ধ্রুবক ধরিবে)

25. আমাকে নির্দিষ্ট সময়ে একটি নির্দিষ্ট স্থানে পৌঁছাইতে হইবে। যদি আমি $3\frac{3}{4}$ কি. মি. ঘণ্টা বেগে হাঁটি তবে 8 মিনিট দেরীতে পৌঁছাইব। কিন্তু যদি $4\frac{1}{2}$ কি মি ঘণ্টা বেগে হাঁটি তবে 13 মিনিট 24 সেকেণ্ড আগে পৌঁছাইব। আমাকে কতদূর যাইতে হইবে ?

26. 5 খানি টেবিল এবং 9 খানি চেয়ারের মোট দাম 90 টাকা এবং 4 খানি টেবিল ও 5 খানি চেয়ারের মোট দাম 61 টাকা হইলে 3 খানি টেবিল ও 6 খানি চেয়ারের মোট দাম নির্ণয় কর।

[Pat. '30]

27. কিছু টাকা কয়েকজন ছাত্রের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করিয়া দিতে গিয়া দেখা গেল যে 2 জন ছাত্র কম থাকিলে প্রত্যেকে 3 টাকা করিয়া বেশি পাইত। কিন্তু 3 জন ছাত্র বেশি থাকিলে প্রত্যেকে 3 টাকা করিয়া কম পাইত। কত টাকা ভাগ করিয়া দেওয়া হইয়াছিল ?

28. 1টি ঘড়ি, 2টি প্যাণ্ট এবং 2টি জামার মূল্য 380 টাকা। 3টি ঘড়ির দাম 5টি প্যাণ্টের দাম অপেক্ষা 40 টাকা কম। যদি 4টি জামার দাম, 1টি ঘড়ি ও 1টি প্যাণ্টের দামের সমান হয় তবে 3টি ঘড়ি, 3টি প্যাণ্ট ও 11টি জামার মোট মূল্য কত ?

নবম অধ্যায়

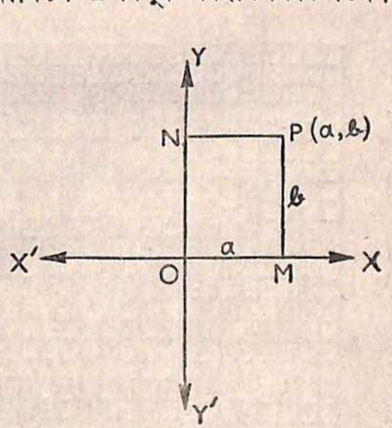
সরল সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন এবং উহার প্রয়োগ

(Graphs of Simple Equations—Applications)

57. কাগজের উপর কোন বিন্দুর অবস্থান সাধারণতঃ উক্ত কাগজের উপর অঙ্কিত লম্বভাবে ছেদ করে এরূপ দুইটি সরলরেখার অবস্থানের পরিপ্রেক্ষিতে নির্ণয় করা হইয়া থাকে। উক্ত সরলরেখাদ্বয়ের একটিকে $\overleftrightarrow{XOX'}$ এবং অপরটিকে $\overleftrightarrow{YOY'}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। সরলরেখা দুইটিকে **অক্ষ** (axes) বলা হয়। $\overleftrightarrow{XOX'}$-কে x-**অক্ষ** (x axis) এবং $\overleftrightarrow{YOY'}$ কে y-**অক্ষ** (y axis) বলে। সরলরেখাদ্বয়ের ছেদ-বিন্দু Oকে **মূলবিন্দু** (origin) বলা হয়।

58. **অক্ষদ্বয়ের পরিপ্রেক্ষিতে P বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় ঃ**

P-বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর $\overline{PM}$ ও y-অক্ষের উপর $\overline{PN}$ লম্ব অঙ্কন কর। এখন PMON একটি আয়তক্ষেত্র, অতএব PN = MO। অঙ্কন অনুসারে বলা যায় যে, P বিন্দু x-অক্ষ ও y-অক্ষ হইতে যথাক্রমে PM ও PN দূরত্বে অবস্থিত। কিন্তু PN = OM। অতএব, OM ও PM জানা থাকিলে P বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় সম্ভব। OM দৈর্ঘ্যকে P বিন্দুর **ভুজ** (abscissa) বা x-**স্থানাঙ্ক** (x-co-ordinate) এবং PM দৈর্ঘ্যকে উক্ত বিন্দুর **কোটি** (ordinate) বা y-**স্থানাঙ্ক** (y-co-ordinate) বলে। ধর OM $= a$ এবং PM $= b$। (a, b)-কে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (co-ordinates) বলা হয়। কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (a, b) হইলে সাধারণত বলা হয় বিন্দুটির $x = a$ এবং $y = b$. আবার বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (a, b) হইতে বোঝা যায় যে, বিন্দুটি y অক্ষ এবং x-অক্ষ হইতে যথাক্রমে a একক ও b একক দূরত্বে অবস্থিত।



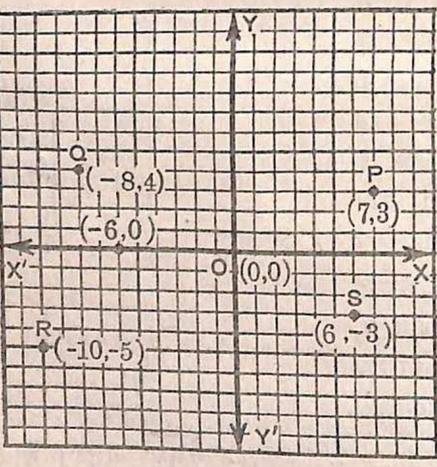
উপরের চিত্রটি লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে, $\overleftrightarrow{XOX'}$ এবং $\overleftrightarrow{YOY'}$ অক্ষদ্বয় কাগজের সমতলকে XOY, YOX', X'OY' এবং Y'OX এই চারিটি অংশে বিভক্ত করিয়াছে। এক একটি অংশকে এক একটি পাদ (Quadrant) বলে। XOY-কে **প্রথম পাদ**, YOX'-কে **দ্বিতীয় পাদ**, X'OY'-কে **তৃতীয়পাদ**, এবং Y'OX কে **চতুর্থ পাদ** বলা হয়। P বিন্দু অক্ষদ্বয়ের যে কোন একটির উপর অথবা পাদগুলির যে কোন একটির ভিতরে অবস্থিত হইতে পারে। $\overleftrightarrow{YOY'}$-অক্ষের ডানদিকে P বিন্দু অবস্থিত

হইলে উহার x-স্থানাঙ্ককে সর্বদা ধনাত্মক এবং $\overleftrightarrow{YOY'}$ অক্ষের বামদিকে অবস্থিত হইলে উহার x-স্থানাঙ্ককে ঋণাত্মক ধরা হয়। আবার P বিন্দুটি $\overleftrightarrow{XOX'}$ অক্ষের উপরের দিকে অবস্থিত হইলে বিন্দুটির y-স্থানাঙ্ককে ধনাত্মক এবং $\overleftrightarrow{XOX'}$-এর নীচের দিকে অবস্থিত হইলে y-স্থানাঙ্ক ঋণাত্মক বলিয়া ধরিয়া লওয়া হয়। যেমন, P বিন্দুটি যদি দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত হয় তাহা হইলে P বিন্দুটি y অক্ষের বাম দিকে এবং x অক্ষের উপরের দিকে অবস্থিত। অতএব, ইহার x-স্থানাঙ্ক ঋণাত্মক এবং y-স্থানাঙ্ক ধনাত্মক। আবার মনে কর P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, − 7) ; অতএব P বিন্দুর x স্থানাঙ্ক ধনাত্মক এবং y-স্থানাঙ্ক ঋণাত্মক। ∴ বিন্দুটি চতুর্থ পাদে অবস্থিত।

59. ছক কাগজে (Squared paper) বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় :

পার্শ্বের চিত্রটি ছক কাগজের একটি চিত্র। চিত্রটি হইতে বোঝা যায় যে, এখানে যে-কোন দুইটি রেখাংশ পরস্পরের সমান্তরাল অথবা পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে। অর্থাৎ এখানে দুই প্রকারের রেখাংশ আছে। এক প্রকার রেখাংশগুলি কাগজের অনুভূমিক প্রান্তের সহিত সমান্তরাল (কাগজের উপরিতল আয়তক্ষেত্র) এবং অবশিষ্ট রেখাংশগুলি কাগজের উলম্ব প্রান্তের সহিত সমান্তরাল। সাধারণতঃ পরপর অবস্থিত দুইটি সমান্তরাল রেখাংশ একটি অপরটি হইতে ·1 ইঞ্চি বা 1 সে মি. দূরে অবস্থিত। রেখাংশগুলি কাগজটিকে কতকগুলি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গ ক্ষেত্রে বিভক্ত করে। প্রতিটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য ·1 ইঞ্চি বা ·1 সে. মি। পূর্বেই উল্লেখ করা হইয়াছে কাগজের উপর কোন বিন্দুর অবস্থান সাধারণতঃ দুইটি অক্ষের অবস্থানের পরিপ্রেক্ষিতে নির্ণয় করা হয়। ছক কাগজের উপর কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য ছক কাগজের মাঝামাঝি স্থানে অবস্থিত দুইটি ছেদী সরলরেখাকে অক্ষ হিসাবে চিহ্নিত করা হয়। অক্ষদ্বয়কে অন্য সরলরেখাগুলি হইতে পৃথক করিবার জন্য নির্দিষ্ট সরলরেখা দুইটির উপর পেন্সিল দিয়া আবার দাগ টানিয়া লওয়া হয়। সরলরেখাদ্বয়ের অনুভূমিক রেখাটিকে (ডানদিক হইতে) $\overleftrightarrow{XOX'}$ এবং উলম্ব রেখাটিকে (উপর দিক হইতে) $\overleftrightarrow{YOY'}$ ভাবে চিহ্নিত করা হয়।

P-90



ধর, P একটি বিন্দু যাহার স্থানাঙ্ক (7, 3) ; এই বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে। চিহ্নের নিয়ম হইতে বলা যায় যে বিন্দুটি প্রথম পাদে অবস্থিত। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া O বিন্দু অর্থাৎ মূল বিন্দু হইতে ডানদিকে $\overrightarrow{OX}$ বরাবর 7 একক গিয়া উপরের দিকে 3 একক গেলেই বিন্দুটির অবস্থান পাওয়া যাইবে।

মনে কর, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-8, 4)$; বিন্দুটি দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত। ইহার $x=-8$, $y=4$. ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া O বিন্দু হইতে বাম দিকে $\overrightarrow{OX'}$ বরাবর 8 একক গিয়া উপরের দিকে 4 একক গেলেই বিন্দুটির অবস্থান চিহ্নিত করা যাইবে।

ধর, অপর একটি বিন্দু R-এর স্থানাঙ্ক $(-10, -5)$, বিন্দুটি তৃতীয় পাদে অবস্থিত। ইহার $x=-10$, $y=-5$. O বিন্দু হইতে বামদিকে $\overrightarrow{OX'}$ বরাবর 10 একক গিয়া নীচের দিকে 5 একক গেলেই R বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যাইবে।

এইরূপে চতুর্থ পাদে অবস্থিত $S=(6, -3)$ বিন্দুটিকে চিহ্নিত করিবার জন্য O বিন্দু হইতে $\overrightarrow{OX}$ বরাবর 6 একক অগ্রসর হইয়া নীচের দিকে 3 একক যাইতে হইবে। x-অক্ষের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর দূরত্ব উক্ত অক্ষ হইতে 0 (শূন্য) বলিয়া উক্ত বিন্দুগুলির y-স্থানাঙ্ক সর্বদা শূন্য হইবে। বিপরীতভাবে যে সমস্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ ধরনের, অর্থাৎ যাহাদের y স্থানাঙ্ক শূন্য তাহারা প্রত্যেকে x অক্ষের উপর অবস্থিত।

আবার y-অক্ষের উপর অবস্থিত প্রত্যেকটি বিন্দু হইতে y-অক্ষের দূরত্ব শূন্য বলিয়া উক্ত বিন্দুগুলির x স্থানাঙ্ক শূন্য হইবে এবং যে সমস্ত বিন্দুগুলির x স্থানাঙ্ক শূন্য তাহারা y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

মূলবিন্দু উভয় অক্ষের উপর অবস্থিত বলিয়া ইহার $x=0$ এবং $y=0$. অতএব, মূল বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$.

ধর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-6, 0)$; বিন্দুটির y স্থানাঙ্ক শূন্য। অতএব ইহা x-অক্ষের উপর অবস্থিত। আবার ইহার x স্থানাঙ্ক ঋণাত্মক। ইহা $\overleftrightarrow{YOY'}$ অক্ষের বাম দিকে অবস্থিত। অতএব, O বিন্দু হইতে বাম দিকে $\overrightarrow{OX'}$ বরাবর 6 একক অগ্রসর হইলে P বিন্দুর অবস্থান পাওয়া যাইবে।

কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে উপরিউক্ত পদ্ধতি অনুযায়ী ছক কাগজে বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে **বিন্দু সংস্থাপন** (Plotting of point) বলে।

অষ্টম শ্রেণীতে বিন্দু-সংস্থাপন বিষয়ে সাধারণতঃ বিস্তারিত আলোচনা করা হয়।

বিঃ দ্রঃ 'একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (a, b)' এই কথার পরিবর্তে অনেক সময় লেখা হয়, 'একটি বিন্দু (a, b)'।

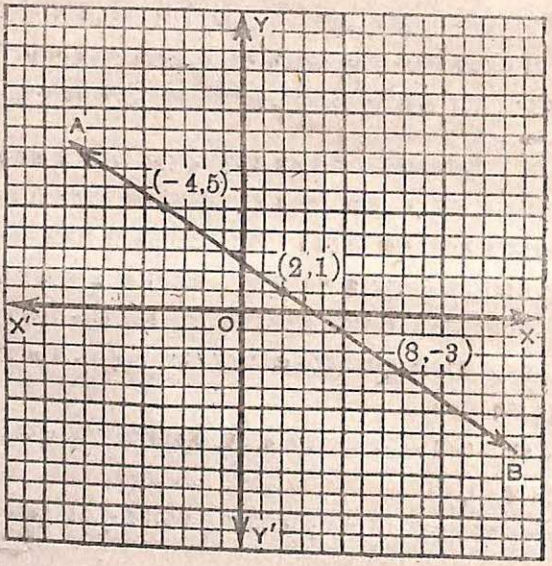
60. সরল সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন।

a, b সংখ্যাদ্বয় একই সাথে শূন্য না হইলে $ax+by=c$ কে x এবং y-এর **একঘাত সমীকরণ** বা **সরল সমীকরণ** (linear equation or simple equation) বলে। যথা, $2x+3y=7$, একটি x, y এর সরল সমীকরণ।

$2x+3y=7$ সমীকরণে $x=2, -4, 8$ বসাইলে $y=1, 5, -3$ হইবে।

এখন ছক কাগজে $(2, 1)$, $(-4, 5)$ এবং $(8, -3)$ বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর। স্কেলের সাহায্যে উক্ত বিন্দুগুলির যে-কোন দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখা অঙ্কন করিলে দেখা যাইবে যে, অঙ্কিত সরলরেখাটির উপর অবশিষ্ট বিন্দুটিও অবস্থিত হইবে। অঙ্কিত সরলরেখাটিকে প্রদত্ত সমীকরণের **'লেখচিত্র'** বা **'লেখ'** (Graph) বলা হয়।

P-92



$2x+3y=7$ সমীকরণে $x=2$ এবং $y=1$ বসাইলে সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে এইক্ষেত্রে বলা হয় সমীকরণটি $(2, 1)$ বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ।

$ax+by=c$ সরল সমীকরণে x-এর তিনটি মান বসাইয়া পৃথক পৃথক ভাবে y-এর মান নির্ণয় কর। এখন x-এর একটি মানকে x স্থানাঙ্ক এবং y-এর অনুরূপ মানকে y স্থানাঙ্ক ধরিলে তিনটি পৃথক পৃথক বিন্দুর স্থানাঙ্ক পাওয়া যাইবে। ছক কাগজে বিন্দুগুলিকে সংস্থাপন কর। এই বিন্দুত্রয়গামী ছক কাগজে অঙ্কিত সরল রেখাটিকে $ax+by=c$ সরল সমীকরণের লেখচিত্র (Graph) বলে। $ax+by=c$-কে উক্ত লেখচিত্রের সমীকরণ বলা হয়।

উদা. 1. $y=0$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

উঃ প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়।

$$0.x+1.y=0$$

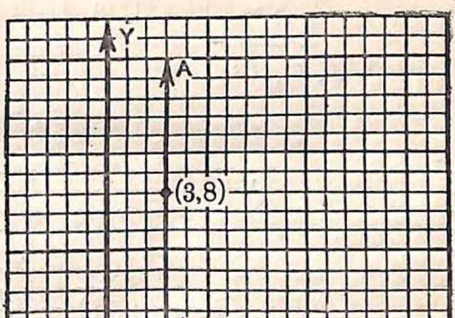
ইহা x, y-এর একটি সরল সমীকরণ। এই সমীকরণ হইতে যখন $x=1, 4, 8$; তখন $y=0, 0, 0$। অতএব, $P=(1, 0)$, $Q=(4, 0)$ এবং $R=(8, 0)$ তিনটি বিন্দু। এখন ছক কাগজে $\overleftrightarrow{XOX'}$ অর্থাৎ x-অক্ষ এবং $\overleftrightarrow{YOY'}$ অর্থাৎ y-অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া বিন্দুত্রয় সংস্থাপন কর। যেহেতু বিন্দু তিনটির প্রত্যেকটির y-স্থানাঙ্ক শূন্য অতএব উক্ত বিন্দুগুলি অবশ্যই x-অক্ষের উপর অবস্থিত। সুতরাং ঐ বিন্দুত্রয়গামী সরলরেখাটি x-অক্ষ হইবে। অতএব x-অক্ষ প্রদত্ত সমীকরণে নির্ণেয় লেখচিত্র। [নিজে আঁক।]

উদা. 2. $x=3$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

উঃ প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করা যায়।

$$1.x+0.y=3.$$

ইহা একটি সরল সমীকরণ। এই সমীকরণে, x-এর মান 3 বসাইলে এবং y-এর যে-কোন মান বসাইলে সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। অতএব $(3, 1)$, $(3, -2)$ এবং $(3, 8)$ বিন্দুত্রয় সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিবে।



ছক কাগজে অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর। O মূল বিন্দু।

এবার ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উক্ত বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর। $(3, 1)$ এবং $(3, 8)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ অঙ্কন কর। দেখা যাইবে যে $(3, -2)$ বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত। অতএব, $\overleftrightarrow{AB}$-ই নির্ণেয় লেখচিত্র। লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি y-অক্ষের সমান্তরালভাবে মূল বিন্দু হইতে y-অক্ষের ডানদিকে 3 একক দূরে অবস্থিত।

উদা. 3. $y=-9$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

উঃ প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় $0.x+1.y=-9.$

এই সমীকরণটিতে x-এর যে কোন মান এবং y-এর মান -9 বসাইলে সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। অতএব $(1, -9), (-3, -9)$ এবং $(8, -9)$ বিন্দুত্রয় সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিবে।

ছক কাগজে অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর। O মূল বিন্দু। এবার ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুকে একক ধরিয়া $(1, -9), (-3, -9)$ এবং $(8, -9)$ বিন্দুগুলি ছক কাগজে সংস্থাপন কর। স্কেলের সাহায্যে $(1, -9)$ এবং $(8. -9)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটিকে অঙ্কন কর। দেখা যাইবে যে $(-3, -9)$ বিন্দুটি উক্ত সরলরেখার উপর অবস্থিত। অতএব অঙ্কিত সরলরেখাটি প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় লেখচিত্র। অঙ্কন হইতে দেখা যায় যে সরলরেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল এবং x-অক্ষের নীচের দিকে মূলবিন্দু হইতে 9 একক দূরে অবস্থিত। [নিজে আঁক]

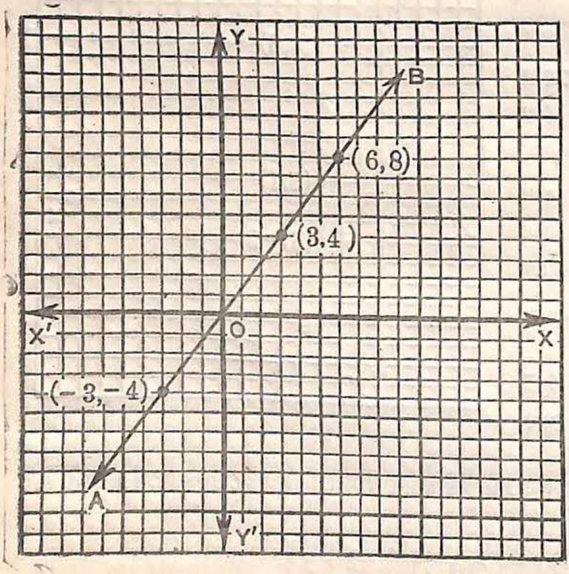
উদা. 4. $4x = 3y$ সমীকরণটি লেখচিত্র অঙ্কন কর। [C. U. 1948]

উঃ সমীকরণটিকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়। $y = \frac{4}{3}x$.

এই সমীকরণ হইতে,

$x=$	3	6	-3	হইলে
$y=$	4	8	-4	হইবে।

অতএব $(3, 4)$, $(6, 8)$ এবং $(-3, -4)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।



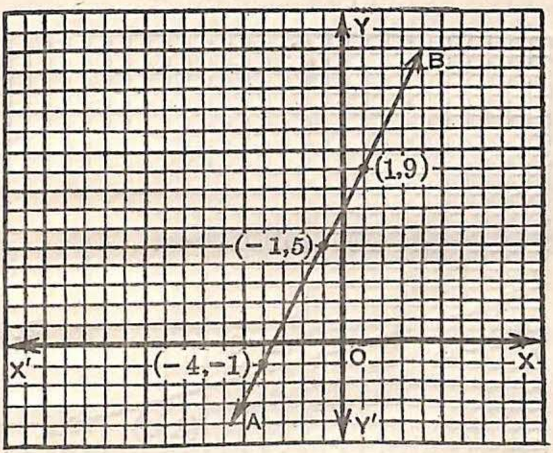
ছক কাগজে x-অক্ষ $\overleftrightarrow{XOX'}$ এবং y-অক্ষ $\overleftrightarrow{YOY'}$ অঙ্কন কর। O মূলবিন্দু। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে সংস্থাপন কর। স্কেলের সাহায্যে $(3, 4)$ এবং $(-3, -4)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটিকে অঙ্কন কর। সরলরেখাটি $(6, 8)$ বিন্দু দিয়াও যায়। অতএব অঙ্কিত সরলরেখাটি প্রদত্ত সমীকরণটির নির্ণেয় লেখচিত্র।

উদা. 5. $y=2x+7$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। [C. U. 1946]। লেখচিত্রটি হইতে প্রদত্ত সমীকরণটির দুইটি সমাধান নির্ণয় কর।

উঃ প্রদত্ত সমীকরণটি $y=2x+7$. এই সমীকরণ হইতে,

$x=$	1	-1	-4	হইলে
$y=$	9	5	-1	হইবে।

অতএব (1, 9), (−1, 5) এবং (−4, −1) বিন্দুত্রয় দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। ছক কাগজে x-অক্ষ $\overleftrightarrow{XOX'}$ এবং y-অক্ষ $\overleftrightarrow{YOY'}$ অঙ্কন কর। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উক্ত বিন্দুগুলিকে ছক কাগজে



সংস্থাপন কর। স্কেলের সাহায্যে (1, 9) এবং (−1, 5) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটি অঙ্কন কর। দেখিবে যে সরলরেখাটি (−4, −1) বিন্দু দিয়াও যাইবে। অতএব, ছক কাগজে অঙ্কিত সরলরেখাটি নির্ণয় লেখচিত্র। লেখচিত্রটি হইতে দেখা যায় যে, (3, 13) এবং (0, 7) বিন্দুদ্বয় প্রদত্ত সমীকরণটির দুইটি সমাধান।

উদা. 6. $2x+7y=-12$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। [C. U. '37]

উঃ প্রদত্ত সমীকরণটি $2x+7y=-12$.

এই সমীকরণটিকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়—

$$7y=-2x-12.$$

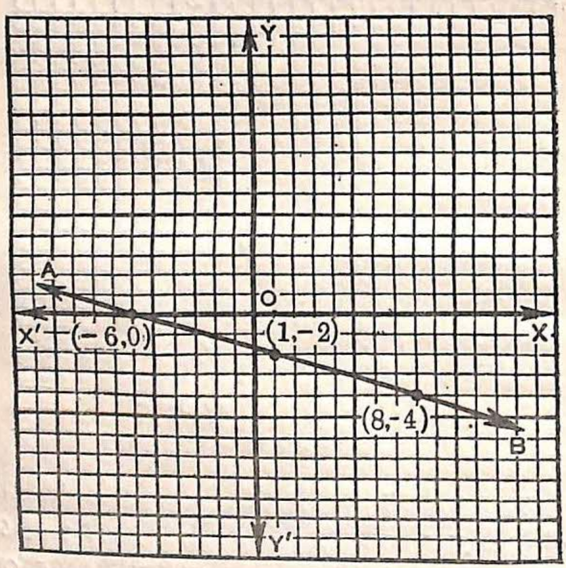
$$\therefore \quad y=\frac{-2x-12}{7} \ldots\ldots(1)$$

$\therefore$ (1) হইতে

$x=$	1	-6	8	হইলে
$y=$	-2	0	-4	হইবে।

$\therefore$ $(1, -2)$, $(-6, 0)$ এবং $(8, -4)$ বিন্দুগুলির দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

এবার ছক কাগজে অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর। O মূলবিন্দু। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উক্ত বিন্দুগুলিকে ছক কাগজে সংস্থাপন কর। স্কেলের সাহায্যে $(1, -2)$ এবং $(8, -4)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটি অঙ্কন কর। মন কর, সরলরেখাটি $\overleftrightarrow{AB}$; দেখা গেল যে, $\overleftrightarrow{AB}$-এর উপর $(-6, 0)$ বিন্দুটিও



অবস্থিত। অতএব, ছক কাগজে অঙ্কিত $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় লেখচিত্র।

উদা. 7. $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$ সমীকরণটির লেখচিত্রটি অঙ্কন কর এবং অক্ষদ্বয় হইতে ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য মাপিয়া নির্ণয় কর। [C. U. '42]

উঃ $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$

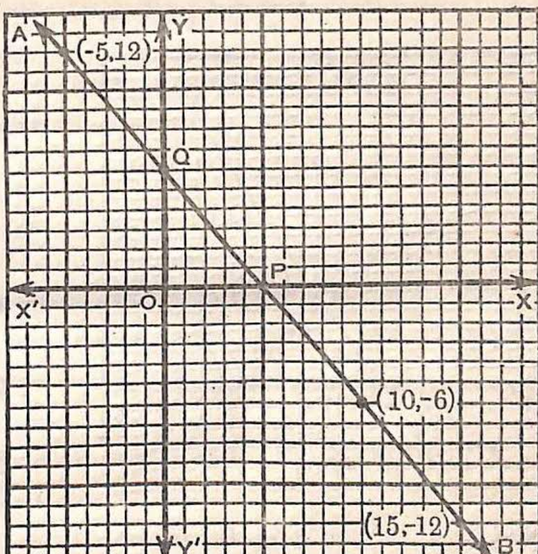
বা, $6x+5y=30$ [উভয় পক্ষকে 30 দ্বারা গুণ করিয়া] বা, $5y=30-6x$.

$$\therefore \quad y=\frac{30-6x}{5} \ldots\ldots (1)$$

(1) হইতে,

$x=$	10	-5	15	হইলে
$y=$	-6	12	-12	হইবে।

$\therefore$ $(10, -6)$, $(-5, 12)$ এবং $(15, -12)$ বিন্দুগুলির দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। এবার ছক কাগজে অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর। O মূলবিন্দু। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে সংস্থাপন কর। স্কেলের সাহায্যে $(10, -6)$, $(15, -12)$ বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটি অঙ্কন কর। মনে কর, সরলরেখাটি $\overleftrightarrow{AB}$; দেখা গেল যে $(-5, 12)$ বিন্দুটিও $\overleftrightarrow{AB}$-এর উপর



অবস্থিত। অতএব, ছক কাগজে অঙ্কিত $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় লেখ। মনে কর, $\overleftrightarrow{AB}$ রেখা x-অক্ষকে P বিন্দুতে এবং y অক্ষকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। দৈর্ঘ্য মাপিয়া দেখা গেল যে $OP=5$ একক এবং $OQ=6$ একক।

61. $bx+c$ রাশির লেখচিত্র অঙ্কন :

মনে কর, $y=bx+c$; এই সরল সমীকরণটির লেখচিত্রকে $bx+c$ রাশির লেখচিত্র বলে।

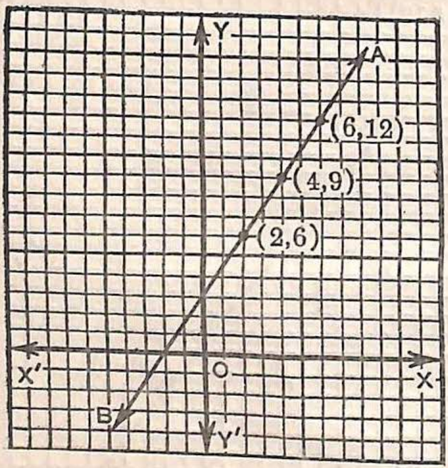
উদা. 8. $\frac{3}{2}x+3$ রাশির লেখচিত্র অঙ্কন কর। $x=8$ হইলে লেখচিত্র হইতে রাশিটির মান নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, $y=\frac{3}{2}x+3 \cdots\cdots(1)$
এখন (1) হইতে,

$x=$	2	4	6	হইলে
$y=$	6	9	12	হইবে।

$\therefore$ (2, 6), (4, 9), (6, 12) বিন্দুত্রয় উক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

ছক কাগজে অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর। O মূলবিন্দু। ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে সংস্থাপন কর। স্কেল দ্বারা (2, 6) এবং (6, 12) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটিকে অঙ্কন কর। মনে কর, সরলরেখাটিকে $\overleftrightarrow{AB}$; দেখা যাইবে যে 4, 9) বিন্দুটি $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার উপর অবস্থিত।



অতএব, $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি $\frac{3}{2}x+3$ রাশির নির্ণেয় লেখচিত্র।

লেখচিত্রটি হইতে দেখা যায় যে, ইহার যে বিন্দুর x স্থানাঙ্ক 8, তাহার y স্থানাঙ্ক 15; অতএব $x=8$ হইলে লেখচিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, প্রদত্ত রাশির মান 15 হইবে।

মন্তব্য ঃ সরল সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন যাহাতে নির্ভুল হয় সেইজন্য নিয়মগুলি অনুসরণ করা যাইতে পারে।

(1) প্রদত্ত সমীকরণটিকে $y=mx+b$ আকারে প্রকাশ কর।

(2) x-এর মান এইরূপ লইবে যাহাতে যে বিন্দু তিনটি ছক কাগজে সংস্থাপনের জন্য ঠিক করিবে তাহাদের স্থানাঙ্ক যেন অখণ্ড সংখ্যা হয়।

(3) x বা y-এর সহগ ভগ্নাংশ হইলে উহাদের মান এইরূপ ভাবে ধর যাহাতে বিন্দু সংস্থাপনে অসুবিধা না হয়। (উদা 8 দেখ)

(4) বিন্দু তিনটি যাহাতে কিছুটা দূরে দূরে থাকে, সেইভাবে স্থানাঙ্কগুলি নির্ণয় কর।

62. লেখচিত্রের সাহায্যে সরল সমীকরণ সম্বন্ধীয় প্রশ্ন সমাধান :

উদা. 9. 5 কিলোগ্রাম চাউলের দাম 15 টাকা হইলে, লেখচিত্রের দ্বারা 6 কিলোগ্রাম চাউলের দাম এবং 12 টাকায় কত কিলোগ্রাম চাউল পাওয়া যাইবে নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, x কিলোগ্রাম চাউলের দাম y টাকা।

এখন, 5 কিলোগ্রাম চাউলের দাম 15 টাকা।

$\therefore$ x " " " $\frac{15}{5}\times x$ " $=3x$ টাকা।

$\therefore$ $y=3x$ সমীকরণটির লেখচিত্রটি চাউলের পরিমাণ ও উহার মূল্য নিরূপক সমীকরণ হইবে।

এখন $y=3x$ হইতে,

$x=$	1	3	4	হইলে
$y=$	3	9	12	হইবে।

এখন (1, 3), (3, 9), (4, 12) বিন্দুগুলি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

ছক কাগজে অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর। O মূলবিন্দু। এখন x অক্ষের উপর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে '1 কিলোগ্রাম' এবং y অক্ষের উপর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে '1 টাকা' ধরিয়া উক্ত বিন্দুগুলির সাহায্যে $y=3x$-এর লেখচিত্র $\overleftrightarrow{AB}$ অঙ্কন কর। এই লেখচিত্রের উপর (a, b) একটি বিন্দু হইলে বিন্দুটির x স্থানাঙ্ক চাউলের পরিমাণ ও y স্থানাঙ্ক উক্ত চাউলের দামকে সূচিত করে। অর্থাৎ উক্ত বিন্দু হইতে বলা যায় যে a কিলোগ্রাম চাউলের দাম b টাকা অথবা b টাকায় a কিলোগ্রাম চাউল পাওয়া যাইবে। লেখচিত্র হইতে যেথা যাইতেছে যে $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার যে বিন্দুতে x স্থানাঙ্ক 6, উহার y স্থানাঙ্ক 18 ; এবং যে বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 12, উহার x স্থানাঙ্ক 4।

অতএব, 6 কিলোগ্রাম চাউলের দাম 18 টাকা এবং 12 টাকায় 4 কিলোগ্রাম চাউল পাওয়া যাইবে। (চিত্র নিজে অঙ্কন কর।)

মন্তব্যঃ $\overleftrightarrow{AB}$ লেখচিত্রটিকে 'মূল্য নির্দেশক লেখচিত্র' (Price graph) বলে।

উদা. 10. 2 ফুট $\frac{50}{81}$ মিটারের সমান। 25 মিটার কত ফুটের সমান হইবে তাহা লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, y ফুট $=x$ মিটার।

এখন 2 ফুট $=\frac{50}{81}$ মিটার।

$\therefore$ 1 " $=\frac{25}{81}$ "

$\therefore$ y " $=\frac{25y}{81}$ "

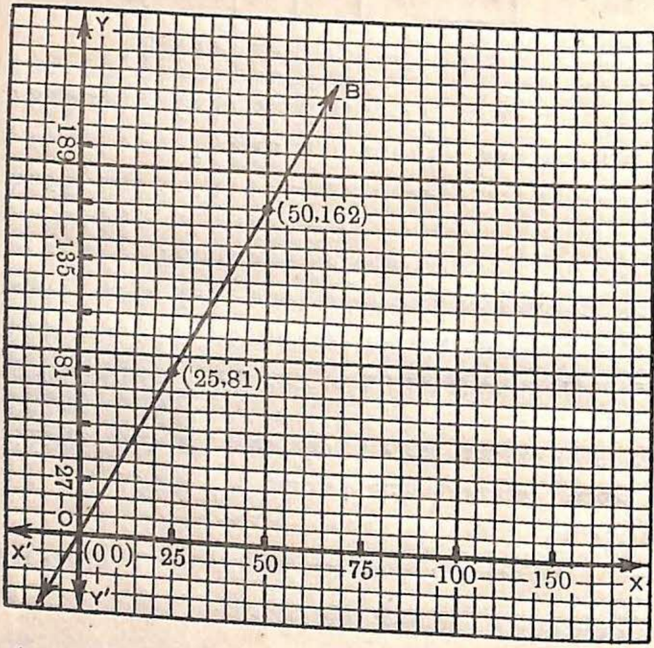
$$\therefore \quad \frac{25y}{81}=x \text{ অর্থাৎ } y=\frac{81x}{25} \quad \cdots(1)$$

এখন (1) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

$\therefore$ (1) সমীকরণ হইতে,

$x=$	0	25	50	হইলে
$y=$	0	81	162	হইবে।

$\therefore$ (0, 0), (25, 81) এবং (50, 162) বিন্দুগুলি (1) নং সমীকরণকে সিদ্ধ করে। এখন ছক কাগজে অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর। O মূলবিন্দু। x অক্ষের উপর



ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে 5 মিটার ধরিয়া এবং y অক্ষের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে 9 ফুট ধরিয়া উক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে সংস্থাপন করিয়া $\overleftrightarrow{OB}$ লেখচিত্রটি অঙ্কন কর। উক্ত লেখচিত্রে যে বিন্দুটির x-স্থানাঙ্ক 25, উহার y-স্থানাঙ্ক 81 ; অতএব 25 মিটার 81 ফুটের সমান হইবে।

মন্তব্য : $\overleftrightarrow{OB}$ লেখচিত্রটিকে 'একক পরিবর্তক লেখচিত্র' (unit coversation graph) বলে।

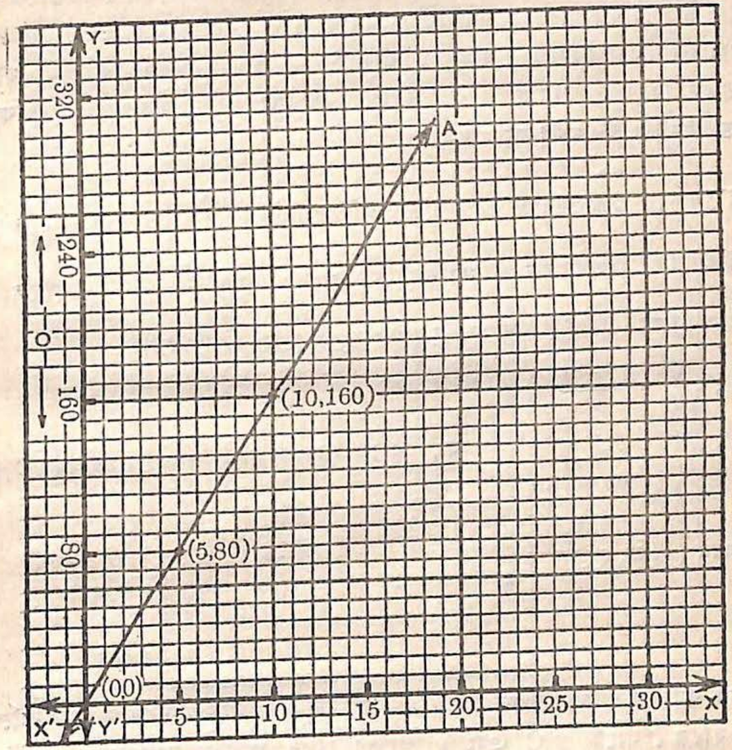
উদা. 11. একটি গাড়ী ঘণ্টায় 16 কি. মি. বেগে চলে। এমন একটি লেখচিত্র অঙ্কন কর যাহার উপর অবস্থিত বিন্দু (x, y)-এর x স্থানাঙ্ক গাড়ীটির গতির সময় এবং y-স্থানাঙ্ক উক্ত সময়ে অতিক্রান্ত পথকে সূচিত করে। এই লেখচিত্র হইতে গাড়ীটি 15 ঘণ্টায় কত কি. মি. যাইবে এবং 320 কি. মি. যাইতে কত ঘণ্টা লাগিবে নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর গাড়ীটি x ঘণ্টায় y কি. মি. যায়।

গাড়ীটি 1 ঘণ্টায় 16 কি. মি. যায়।

∴ x „ $16x$ „ „ ।

∴ $y = 16x$



এই সমীকরণটির লেখচিত্রই নির্ণেয় লেখচিত্র।

এখন সমীকরণটি হইতে

$x=$	0	5	10	হইলে
$y=$	0	80	160	হইবে।

অতএব (0, 0), (5, 80) এবং (10, 160) বিন্দুগুলির দ্বারা সমীকরণটির সিদ্ধ হইবে। ছক কাগজে অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর। O মূল বিন্দু। y অক্ষের উপর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রর একটি বাহুকে 10 কি. মি. ধরিয়া এবং x অক্ষের উপর বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে 1 ঘণ্টা ধরিয়া ছক কাগজে বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর। [(5, 80) বিন্দুটি সংস্থাপন করিতে মূল বিন্দু হইতে ডান দিকে $\overleftrightarrow{OX}$ বরাবর 5 ঘর গিয়া উপরের দিকে 8 ঘর যাইতে হইবে।] এইবার বিন্দুগুলির সাহায্যে $\overleftrightarrow{OA}$ লেখচিত্রটি অঙ্কন কর। এই লেখচিত্রটির যে কোন বিন্দুর y স্থানাঙ্ক গাড়ী কর্তৃক অতিক্রান্ত কি. মি.-এর সংখ্যাকে এবং x-স্থানাঙ্ক উক্ত পথ অতিক্রান্ত করিতে প্রয়োজনীয় ঘণ্টাকে সূচিত করে। উক্ত লেখচিত্রের যে বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক 15, সেই বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক 240। অতএব, লেখচিত্র হইতে বলা যায় যে গাড়ীটি 15 ঘণ্টায় 240 কি. মি. যাইবে। আবার যে বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 320, উহার x-স্থানাঙ্ক 20 ; অতএব 320 কি. মি. যাইতে গাড়ীটির 20 ঘণ্টা লাগিবে।

মন্তব্য : $\overleftrightarrow{OA}$ লেখচিত্রটিকে গাড়ীর গতি-লেখচিত্র (Motion graph) বলে।

উদা 12. সেন্টিগ্রেড ও ফারেনহাইট স্কেলের সম্বন্ধ $\frac{C}{5}=\frac{F-32}{9}$ হইলে লেখচিত্রের সাহায্যে $-40^\circ F$ কত সেন্টিগ্রেডের সমান তাহা নির্ণয় কর।

উঃ $\frac{C}{5}=\frac{F-32}{9}$

বা, $9C=5(F-32)$ বা, $9C=5F-160$ বা, $5F=9C+160$

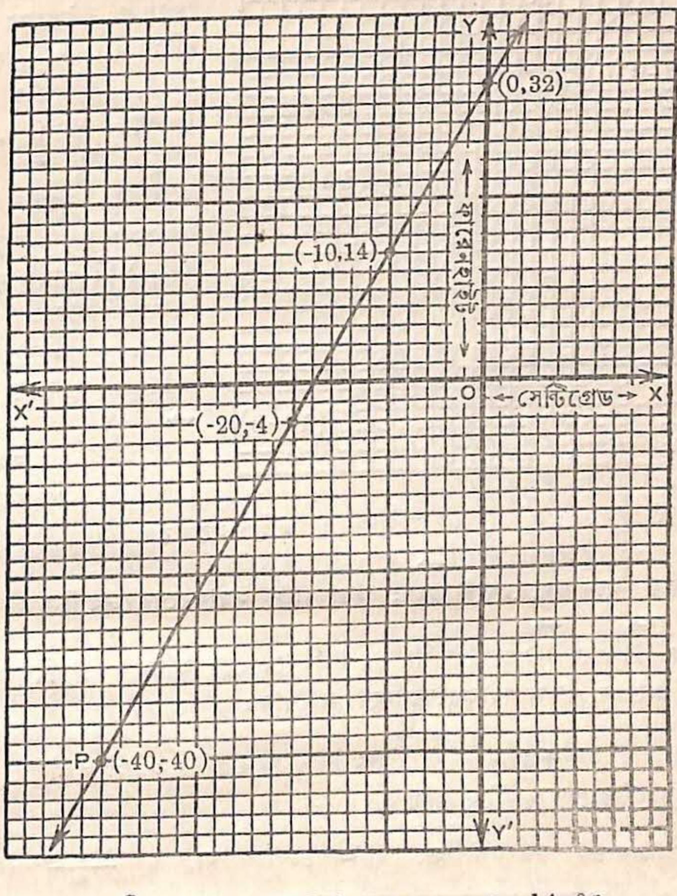
$\therefore F=\frac{9C+160}{5}$ ......(i)

এখন (1) নং হইতে

C=	0	−10	−20	হইলে
F=	32	14	−4	হইবে।

ছক কাগজে অক্ষদ্বয় অঙ্কন কর। O মূল বিন্দু। x অক্ষের উপর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে $2^\circ C$ এবং y অক্ষের উপর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে $2^\circ F$ ধরিয়া (0, 32), (−10, 14) এবং (−20, −4) বিন্দুগুলি ছক কাগজে সংস্থাপন কর। এখন স্কেলের সাহায্যে (−10, 14) এবং (−20, −4) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটিকে অঙ্কন কর। মনে কর সরলরেখাটি $\overleftrightarrow{AB}$; দেখা গেল যে, $\overleftrightarrow{AB}$-এর উপর (0, 32) বিন্দুটিও অবস্থিত। অতএব ছক কাগজে অঙ্কিত $\overleftrightarrow{AB}$ সরলরেখাটি সেন্টিগ্রেড ও ফারেনহাইট স্কেলের সম্বন্ধ সূচক লেখ।

এখন লেখচিত্র হইতে দেখা যায় যে P বিন্দুটির x স্থানাঙ্ক -40 এবং y স্থানাঙ্ক -40। অতএব -40°C, -40°F-এর সমান।



উদা 13. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর : $x-3=\frac{14-3x}{2}$

উঃ ধর, $y=x-3 \cdots\cdots$(i) এবং $y=\frac{14-3x}{2} \cdots\cdots$(ii)

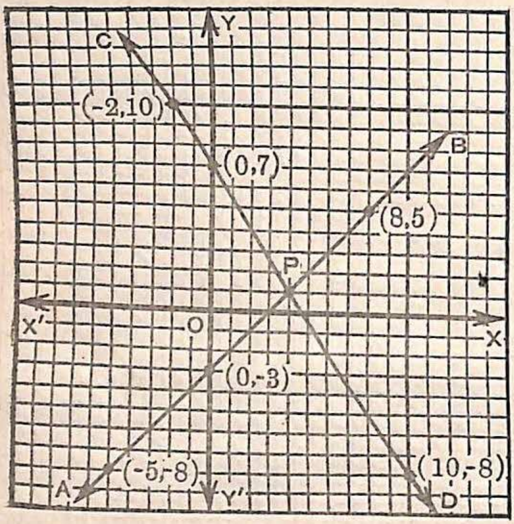
(i) হইতে,

x	0	8	-5	হইলে
y	-3	5	-8	হইবে।

(ii) হইতে,

x	0	-2	10	হইলে
y	7	10	-8	হইবে।

ছক কাগজে x-অক্ষ $\overleftrightarrow{XOX'}$ এবং y-অক্ষ $\overleftrightarrow{YOY'}$ অঙ্কন কর। মনে কর, O মূলবিন্দু। এখন ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া $(0, -3)$, $(8, 5)$, $(-5, -8)$ এবং $(0, 7)$, $(-2, 10)$, $(10, -8)$ বিন্দুগুলিকে ছক কাগজে সংস্থাপন কর। স্কেলের সাহায্যে $(0, -3)$ এবং $(8, 5)$ বিন্দুগামী সরলরেখা অঙ্কন করাতে রেখাটি $(-5, -8)$ বিন্দু দিয়া গমন করিল। মনে কর, রেখাটি $\overleftrightarrow{AB}$; ইহা (i) সমীকরণের লেখচিত্র। আবার স্কেলের সাহায্যে $(0, 7)$ এবং $(-2, 10)$ বিন্দুদ্বয়গামী অঙ্কিত সরলরেখা $(10, -8)$ বিন্দু দিয়া গমন করে। মনে কর, রেখাটি $\overleftrightarrow{CD}$; ইহা (ii) সমীকরণের লেখ চিত্র।



এখন $\overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ রেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিল। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(4, 1)$; অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় সমাধান : $x=4$.

উদা. 14. $3x+4y-11=0$ এবং $4x-3y+2=0$ সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া উহাদের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।

উঃ $3x+4y-11=0$ বা, $4y=11-3x$ বা, $y=\frac{11-3x}{4}$ ...(i)

(i) হইতে

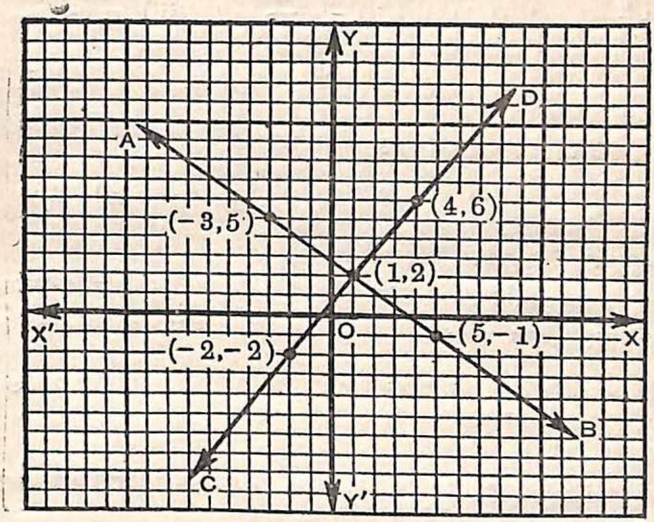
x	1	5	-3	হইলে
y	2	-1	5	হইবে।

আবার $4x-3y+2=0$ বা, $3y=4x+2$ বা, $y=\frac{4x+2}{3}$ ...(ii)

(ii) হইতে

x	1	4	-2	হইলে
y	2	6	-2	হইবে।

ছক কাগজে x-অক্ষ $\overleftrightarrow{XOX'}$ এবং y-অক্ষ $\overleftrightarrow{YOY'}$ অঙ্কন কর। O অক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দু। এখন ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া উভয় সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করা হইল।



প্রথমে (1, 2,), (5, −1) এবং (−3, 5) বিন্দু তিনটি ছক কাগজে সংস্থাপন করিয়া (i)নং সমীকরণের লেখচিত্র $\overleftrightarrow{AB}$ অঙ্কন করা হইল।

অতঃপর (1, 2), (4, 6) এবং (−2, −2) বিন্দু তিনটি ছক কাগজে স্থাপন করিয়া (ii)নং সমীকরণের লেখচিত্র $\overleftrightarrow{CD}$ অঙ্কন করা হইল।

$\overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ রেখাদ্বয় পরস্পরকে যে বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহার স্থানাঙ্ক 1, 2)। ∴ নির্ণেয় সমাধান : $x=1$ এবং $y=2$.

প্রশ্নমালা 20

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন কর :

1. (i) $x=0$ (ii) $x=-5$
   (iii) $y=7$ (C. U. '44) (iv) $y+13=0$,
2. (i) $x=6y$ (C. U. 1946) (ii) $-8x+11y=4$
   (iii) $x-y=0$

3. (i) $y=4x+3$ (C U. 1950) (ii) $y=-5x+7$
(iii) $y=x-5$ (iv) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{7}$ (v) $y=\frac{3}{2}x-1$

4. (i) $3x+4y=12$ (C. U. '49) (ii) $-8x+13y=1$
(iii) $6x-7y=42$ (C. U. '41) (iv) $2x+3y=-3$
(v) $2y-x=2$

5. (i) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ (C. U. '41) (ii) $\frac{x}{7}-\frac{y}{11}=2$ (iii) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=-5$
(iv) $\frac{x}{-9}+\frac{y}{-7}=-5$ (v) $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=0$

6. নিম্নলিখিত রাশিগুলির লেখচিত্র অঙ্কন কর :
(i) $\frac{x-1}{3}$ (ii) $\frac{x}{2}-7$ (iii) $-\frac{x}{7}+9$ (iv) $4x$
(v) $-x$ (vi) $3x+11$

7. $4x+3y=7$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। লেখচিত্র হইতে $x=-5$ ধরিলে y-এর মান কত এবং y-এর মান 13 হইলে x-এর মান কত নির্ণয় কর।

8. $\frac{x+3}{2}$ রাশিটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। $x=3$ ধরিয়া লেখচিত্র হইতে রাশিটির মান নির্ণয় কর।

9. $3x+2$ রাশিটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। লেখচিত্র হইতে $x=-\frac{4}{5}$ হইলে রাশিটির মান কত হইবে নির্ণয় কর।

10. $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং লেখচিত্র হইতে অক্ষদ্বয় দ্বারা ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

11. $3x+2y=6$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর। দেখাও যে (0, 0) বিন্দুটি উক্ত লেখচিত্রের উপর অবস্থিত নয় কিন্তু (8, −9) বিন্দুটি উহার উপর অবস্থিত।

12. $5x+3y=2$ সমীকরণে $x=0$, $x=-2$ এবং $x=2$ বসাইয়া তিনটি বিন্দু নির্ণয় করিয়া লেখচিত্রটি অঙ্কন কর।

13. ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর চারগুণকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া $3x+2y=5$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

14. $5x-9y=1$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। লেখচিত্র হইতে x এবং y-এর এরূপ দুইটি অখণ্ড ধনাত্মক মান নির্ণয় কর যাহা সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

15. দেখাও যে (1, 1) এবং (2, 1) বিন্দুগামী সরল রেখাটি (1, 2) এবং (1, 3) বিন্দুগামী সরলরেখার উপর লম্ব।

16. A (4, 3) এবং B (2, 6) বিন্দুদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন সরল রেখা অঙ্কন কর। সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়কে মূলবিন্দু হইতে কতদূরে ছেদ করিবে তাহা লেখচিত্রটি হইতে নির্ণয় কর।

17. 3 কিলোগ্রাম গমের দাম 6 টাকা হইলে লেখচিত্রের সাহায্যে 7 কিলোগ্রাম গমের দাম এবং 20 টাকায় কত কিলোগ্রাম গম পাওয়া যাইবে তাহা নির্ণয় কর।

18. রাজকুমার প্রত্যহ 6 টাকা করিয়া খরচ করে। লেখচিত্র হইতে তাহার 15 দিনের খরচ এবং 108 টাকা খরচ করিতে মোট দিনের সংখ্যা নির্ণয় কর।

19. 1 ইঞ্চি = 2·5 সে.মি. হইলে 12·5 সে.মি. কত ইঞ্চির সমান হইবে তাহা লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

20. কোন লোক ঘণ্টায় 3 কি.মি. বেগে চলিতেছে। ব্যয়িত সময় এবং অতিক্রান্ত দূরত্বের মধ্যে সম্বন্ধযুক্ত লেখচিত্রটি অঙ্কন কর।

21. কোন লোক 1 টার সময় ঘণ্টায় 5 কি. মি. বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। তাহার গতিবেগ সংক্রান্ত লেখচিত্রটি অঙ্কন কর। লেখচিত্র হইতে সে কোন সময়ে 15 কি. মি. অতিক্রম করিবে এবং 4 ঘণ্টা 36 মিনিটে সে কত কি. মি. যাইবে তাহা নির্ণয় কর।

22. সেন্টিগ্রেড ও ফারেনহাইট স্কেলের সম্বন্ধ $\frac{C}{100}=\frac{F-32}{180}$ হইলে লেখচিত্রের সাহায্যে (i) 10°C কত ফারেনহাইটের সমান এবং (ii) 122°F কত সেন্টিগ্রেডের সমান তাহা নির্ণয় কর।

23. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর :

(i) $x+2=\frac{3x+5}{2}$ (ii) $\frac{7x-14}{2}=\frac{2-x}{3}$

(iii) $3x-2y=0$; $2x-y=1$ (iv) $x+3y=7$; $8x-y=6$

24. $2x+y=5$ এবং $x-2y=15$ সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুতে উৎপন্ন কোণের পরিমাপ নির্ণয় কর।

পাটীগণিত

প্রথম অধ্যায়

অনুপাত ও সমানুপাত

(Ratio and Proportion)

1. **অনুপাত** (Ratio) : দুইটি একজাতীয় (সম-একক বিশিষ্ট) রাশির মধ্যে একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ, ইহা যে শুদ্ধ সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহাকে ঐ রাশিদ্বয়ের **অনুপাত** (ratio) বলে। যথা, 5 টাকা, 3 টাকার $\frac{5}{3}$ গুণ : অতএব 5 টাকা এবং 3 টাকার অনুপাত $=\frac{5}{3}$; 9 গজ, 17 গজের $\frac{9}{17}$ অংশ ; অতএব 9 গজ এবং 17 গজের অনুপাত $=\frac{9}{17}$.

অর্থাৎ দুইটি একই জাতীয় রাশির অনুপাত পাইতে হইলে প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশির দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। সুতরাং অনুপাতটি সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশিত হইলে প্রথম রাশিটি ভগ্নাংশটির লব এবং দ্বিতীয় রাশিটি উহার হর হইবে। মনে রাখিবে যে দুইটি রাশির একক সমান না হইলে উহাদের অনুপাত নির্ণয় করা যাইবে না।

যেমন, 12 মিটার 13 কিলোগ্রামের কত অংশ তাহা নির্ণয় করা অসম্ভব। আবার 5 ফুট ও 11 ইঞ্চির অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে উহাদের একই এককে প্রকাশ করিয়া লইয়া অনুপাতটি বাহির করিতে হইবে। যথা, 5 ফুট এবং 11 ইঞ্চির অনুপাত $=\frac{5 \text{ ফুট}}{11 \text{ ইঞ্চি}}=\frac{60 \text{ ইঞ্চি}}{11 \text{ ইঞ্চি}}=\frac{60}{11}$

2. **পূর্ব রাশি** এবং **উত্তর রাশি** (Antecedent and Consequent) : অনুপাতের রাশি দুইটির মধ্যে প্রথম রাশিটিকে অনুপাতের **পূর্ব রাশি** (Antecedent) এবং দ্বিতীয় রাশিটিকে অনুপাতের **উত্তর রাশি** (Consequent) বলা হয়। অনুপাতটির উভয় রাশিকেই **অনুপাতের পদ** (Term) বলা হয়। যথা 5 : 7 অনুপাতটিকে 5 পূর্ব রাশি, 7 উত্তর রাশি এবং 5 ও 7 উভয়েই অনুপাতের পদ।

যে অনুপাতে পূর্ব রাশি উত্তর রাশি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর তাহাকে **লঘু অনুপাত** (Ratio of less inequality) বলা হয়। যথা, 5 : 13। কোন অনুপাতের পূর্ব রাশি উত্তর রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে অনুপাতটিকে **গুরু অনুপাত** (Ratio of greater inequality) বলা হয়। যথা, 9 : 8। যে অনুপাতে পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশির মান সমান হয় তাহাকে **সাম্যানুপাত** (Ratio of equality) বলা হয়। যথা, 4 : 4।

যদি কোন অনুপাতের পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশি যথাক্রমে অপর একটি অনুপাতে উত্তর রাশি এবং পূর্ব রাশির সমান হয়, তবে অনুপাতদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে

অপরটির **ব্যস্ত অনুপাত** (Inverse ratio) বলা হয়। যথা, 6 : 7 এবং 7 : 6 অনুপাত দুইটি পরস্পর ব্যস্ত অনুপাতে আছে।

দুই বা ততোধিক অনুপাতের পূর্ব রাশিগুলির গুণফলকে পূর্ব রাশি বা উত্তর রাশিগুলির গুণফলকে উত্তর রাশি ধরিয়া যে অনুপাত গঠন করা হয়, তাহাকে প্রথমোক্ত অনুপাত সমূহের **মিশ্র অনুপাত** (Compound ratio) বলা হয়। যথা, 3 : 4, 5 : 6 এবং 2 : 5-এর মিশ্র অনুপাত $3\times5\times2 : 4\times6\times5$ বা, 1 : 4.

কোন অনুপাতের পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশির বর্গকে যথাক্রমে পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশি ধরিয়া গঠিত অনুপাতটিকে প্রথম অনুপাতটির **দ্বৈত অনুপাত** (Duplicate ratio) বলা হয়। যথা, 4 : 9 অনুপাতটি 2 : 3-এর দ্বৈত অনুপাত।

কোন অনুপাতের পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশির বর্গমূলকে যথাক্রমে পূর্ব রাশি এবং উভয় রাশি ধরিয়া যে অনুপাত গঠন করা হয় তাহাকে পূর্বোক্ত অনুপাতের **অবদ্বৈত অনুপাত** (Sub Duplicate ratio) বলা হয়। যথা, 5 : 4 অনুপাতটি 25 : 16-এর অবদ্বৈত অনুপাত।

3. অনুপাত সম্বন্ধীয় কতকগুলি জ্ঞাতব্য বিষয় :

কোন অনুপাতের পদদ্বয়কে একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে অনুপাতটি অপরিবর্তিত থাকে। যথা, 4 : 3, 12 : 9, 24 : 18, $8x : 6x$ প্রভৃতি অনুপাতগুলি পরস্পর সমান।

অনুপাতের পদ দুইটির প্রত্যেক পদের সহিত একই ধনরাশি যোগ করিলে লঘু অনুপাতের বৃদ্ধিপ্রাপ্ত এবং গুরু অনুপাতের হ্রাসপ্রাপ্তি ঘটে। যথা, 2 : 3-এর প্রত্যেক পদের সহিত 3 যোগ করিলে অনুপাতটি 5 : 6 হয়।

এখন, $2 : 3=\frac{2}{3}$, $5 : 6=\frac{5}{6}$ এবং $(\frac{5}{6}-\frac{2}{3})=\frac{1}{6}$.

অনুপাতের পদ দুইটির প্রত্যেক পদের সহিত একই ধনরাশি বিয়োগ করিলে লঘু অনুপাত হ্রাসপ্রাপ্ত এবং গুরু অনুপাত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়। যথা, $\frac{3}{5}$ অপেক্ষা $\frac{3-2}{5-2}$ বা $\frac{1}{3}$ ক্ষুদ্রতর, $\frac{19}{14}$ অপেক্ষা $\frac{19-3}{14-3}$ বা, $\frac{16}{11}$ বৃহত্তর ; ($\because \frac{16}{11}-\frac{19}{14}=\frac{15}{154}$)।

কোন অনুপাতকে উহার ব্যস্ত অনুপাত দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 1 হইবে। যথা, $\frac{4}{5}.\frac{5}{4}=1$.

উদা. 1. 4 : 7, 5 : 9 এবং 27 : 40-এর মিশ্র অনুপাত নির্ণয় কর।

উঃ নির্ণেয় মিশ্র অনুপাত $=(4\times5\times27) : (7\times9\times40)=3 : 14$.

উদা. 2. $\frac{5}{12} : \frac{7}{18}$-কে ক্ষুদ্রতম পূর্ব সংখ্যার অনুপাতে লিখ।

উঃ প্রদত্ত অনুপাতটির প্রত্যেক পদকে 12 এবং 18-এর ল. সা. গু. দ্বারা গুণ করিলে উহারা ক্ষুদ্রতম পূর্ণ সংখ্যার অনুপাতে পরিণত হইবে।

$\therefore \frac{5}{12} : \frac{7}{18}=(\frac{5}{12}\times36) : (\frac{7}{18}\times36)=15 : 14.$

উদা. 3. 5 : 2, 7 : 4, 11 : 6 অনুপাত তিনটিকে উহাদের মানের উর্ধ্বক্রমে সাজাও।

উঃ সংজ্ঞানুসারে, $5 : 2=\frac{5}{2}$, $7 : 4=\frac{7}{4}$ এবং $11 : 6=\frac{11}{6}$.

উপরের তিনটি ভগ্নাংশের হরগুলির ল. সা. গু. = 12

$12 \div 2 = 6 \quad \therefore \quad \frac{5}{2} = \frac{5 \times 6}{2 \times 6} = \frac{30}{12}$

$12 \div 4 = 3 \quad \therefore \quad \frac{7}{4} = \frac{7 \times 3}{4 \times 3} = \frac{21}{12}$

$12 \div 6 = 2 \quad \therefore \quad \frac{11}{6} = \frac{11 \times 2}{6 \times 2} = \frac{22}{12}$

∴ মানের উর্ধ্ব ক্রমে অনুপাতগুলি যথাক্রমে 7 : 4, 11 : 6 এবং 5 : 2.

উদা. 4. একটি কুকুর একটি শশককে তাড়া করিল। কুকুর যে সময়ে 4 লাফ দেয়, শশক সেই সময়ে 5 লাফ দেয়। কিন্তু কুকুর 3 লাফে যতদূর যায়, শশক 4 লাফে ততদূর যায়। কুকুর ও শশকের বেগের তুলনা কর।

উঃ কুকুর 3 লাফে 1 গজ গেলে শশক 4 লাফে 1 গজ যায়

∴ " 1 " $\frac{1}{3}$ " " " 1 " $\frac{1}{4}$ " "

∴ যে সময়ে কুকুর 4 লাফে $(\frac{1}{3} \times 4)$ গজ যায়, সেই সময়ে শশক 5 লাফে $(\frac{1}{4} \times 5)$ গজ যায়।

∴ কুকুরের গতিবেগ : শশকের গতিবেগ $= (\frac{1}{3} \times 4)$ গজ : $(\frac{1}{4} \times 5)$ গজ

$= \frac{4}{3} : \frac{5}{4} = (\frac{4}{3} \times 12) : (\frac{5}{4} \times 12) = 16 : 15.$

উদা. 5. A এবং B-এর বয়সের অনুপাত 2 : 3 ; দশ বৎসর পূর্বে উহাদের বয়সের অনুপাত ছিল 11 : 19 ; A-এর বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

উঃ এখানে A এবং B-এর বয়সের অনুপাত 2 : 3.

∴ A-এর বর্তমান বয়স $2x$ বৎসর হইলে, B-এর বর্তমান বয়স $3x$ বৎসর হইবে। আবার 10 বৎসর পূর্বে A এবং B-এর বয়স যথাক্রমে $(2x-10)$ বৎসর এবং $(3x-10)$ বৎসর ছিল।

শর্তানুসারে, $\frac{2x-10}{3x-10} = \frac{11}{19}$

বা, $38x - 190 = 33x - 110$ বা, $5x = 80$ বা, $x = 16$

∴ A-এর বর্তমান বয়স $= (2 \times 16)$ বৎসর $= 32$ বৎসর।

4. সমানুপাত (Proportion) :

দুইটি অনুপাত পরস্পর সমান হইলে উহাদিগকে **সমানুপাত** (proportion) বলে। যদি চারিটি রাশির প্রথম এবং দ্বিতীয় রাশির অনুপাত যথাক্রমে তৃতীয় এবং চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে রাশি চারিটিকে **সমানুপাতী** (proportional) বলে।

যেমন, 5 পয়সা : 3 পয়সা = 15 গ্রাম : 9 গ্রাম—একটি সমানুপাত ; কারণ এক্ষেত্রে প্রত্যেকটি অনুপাতের মান $\frac{5}{3}$; এখানে 5 পয়সা, 3 পয়সা 15 গ্রাম এবং 9 গ্রাম রাশি চারিটি সমানুপাতী।

দ্রষ্টব্য : (1) উপরের উদাহরণ হইতে ইহা স্পষ্ট যে, সমানুপাতের রাশি চারিটি এক জাতীয় নাও হইতে পারে। সমানুপাতী রাশি চারিটির মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশি এক জাতীয় এবং তৃতীয় ও চতুর্থ রাশি অন্য জাতীয় হইতে পারে।

(2) সমানুপাতী রাশিগুলি একজাতীয় হইলে, প্রথম রাশি : তৃতীয় রাশি :: দ্বিতীয় রাশি : চতুর্থ রাশি হইবে। যথা, 7, 9, 14, 18 সমানুপাতী রাশিগুলির ক্ষেত্রে 7 : 14 :: 9 : 18.

কোন সমানুপাতকে নিম্নলিখিত প্রকারে প্রকাশ করা যায় :—

(i) $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$; (ii) $3:4=9:12$; (iii) 3 : 4 :: 9 : 12.

এই সমানুপাতটিকে '3 অনুপাত 4 সমান 9 অনুপাত 12'-রূপে পড়িতে হয়।

চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে উহাদের প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে **প্রান্তীয় রাশি** (extremes) এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে **মধ্য রাশি** বা **মধ্যক** (means) বলে।

চতুর্থ রাশিটিকে প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় রাশির **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth proportional) বলে।

যথা, 2 : 7 :: 8 : 28-এর 2 ও 28 প্রান্তীয় রাশি, 7 ও 8 মধ্য রাশি এবং 28 চতুর্থ সমানুপাতী।

অনুসিদ্ধান্ত : চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে উহাদের প্রান্তীয় রাশিদ্বয়ের গুণফল এবং মধ্যরাশিদ্বয়ের গুণফল সমান হইবে। যথা, $3:5=6:10$-এর $3\times10=5\times6$.

এক জাতীয় তিনটি রাশির প্রথম রাশি এবং দ্বিতীয় রাশির অনুপাত যদি দ্বিতীয় এবং তৃতীয় রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ রাশি তিনটিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** (continued proportion) বলে। এক্ষেত্রে দ্বিতীয় রাশিকে প্রথম এবং তৃতীয় রাশির **মধ্য সমানুপাতী** (mean proportional) এবং তৃতীয় রাশিকে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির **তৃতীয় সমানুপাতী** (third proportional) বলে। উল্লেখযোগ্য যে ক্রমিক সমানুপাতীর ক্ষেত্রে রাশি তিনটি এক জাতীয় হইবে।

2, 4 এবং 8 রাশিত্রয় ক্রমিক সমানুপাতী ; কারণ 2 : 4 :: 4 : 8, এখানে 2 এবং 8-এর মধ্য সমানুপাতী 4 এবং 2 ও 4-এর তৃতীয় সমানুপাতী 8.

অনুসিদ্ধান্ত : তিনটি রাশি ক্রমিক অনুপাতে থাকিলে, প্রথম ও তৃতীয় রাশির গুণফল, মধ্য সমানুপাতীর বর্গের সমান হইবে।

যথা, 4 : 10 :: 10 : 25-এর $4\times25=(10)^2$

উদা. 6. 3, 9 এবং 7-এর চতুর্থ সমানুপাতী কত ?

উঃ মনে কর, চতুর্থ সমানুপাতী $=x$.

$\therefore\ 3:9=7:x$ বা, $3\times x=7\times9$

$\therefore\ x=\frac{7\times9}{3}$ বা, $x=21$

$\therefore$ নির্ণেয় চতুর্থ সমানুপাতী $=21$.

উদা. 7. 8 এবং 18-এর মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, মধ্য সমানুপাতী $=x$

$\therefore\ x^2=8\times18$ বা, $x^2=12^2$ বা, $x=12$.

উদা. 8. চারিটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী। প্রথম এবং দ্বিতীয়টি যথাক্রমে 7 এবং 14 হইলে চতুর্থ টি কত ?

উঃ এখানে যে চারিটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী তাহাদের মধ্যে, $\frac{\text{প্রথম}}{\text{দ্বিতীয়}}=\frac{7}{14}$

শর্তানুসারে, $\frac{\text{প্রথম}}{\text{দ্বিতীয়}}=\frac{\text{দ্বিতীয়}}{\text{তৃতীয়}}=\frac{\text{তৃতীয়}}{\text{চতুর্থ}}=\frac{7}{14}$

$\therefore \frac{\text{প্রথম}}{\text{চতুর্থ}}=\frac{\text{প্রথম}}{\text{দ্বিতীয়}}\times\frac{\text{দ্বিতীয়}}{\text{তৃতীয়}}\times\frac{\text{তৃতীয়}}{\text{চতুর্থ}}=\frac{7}{14}\times\frac{7}{14}\times\frac{7}{14}=\frac{1}{8}$

$\therefore$ চতুর্থ রাশি $=8\times$ প্রথম রাশি $=8\times 7=56$.

উদা. 9. যদি $A:B=4:5$, $B:C=9:7$ এবং $C:D=8:3$ হয়, তবে A, B, C, D-এর ক্রমিক অনুপাত নির্ণয় কর।

উঃ প্রদত্ত অনুপাতগুলি হইতে $A:B:C:D$-এর মানগুলি নির্ণয় করিতে হইলে অনুপাতের পদগুলিকে এইরূপে পরিবর্তিত করিতে হইবে যে, $A:B$-এর উত্তর রাশি যেন $B:C$-এর পূর্বরাশির সমান হয়। এই অবস্থায় $B:C$-এর উত্তর রাশিকে $C:D$-এর পূর্ব রাশির সমান করিয়া লইতে হইবে। প্রদত্ত প্রশ্নটির সমাধান প্রণালী লক্ষ্য কর।

এখানে $A:B=4:5$, $B:C=9:7=1:\frac{7}{9}=5:\frac{35}{9}$;

$C:D=8:3=1:\frac{3}{8}=(1\times\frac{35}{9}):(\frac{3}{8}\times\frac{35}{9})=\frac{35}{9}:\frac{35}{24}$

$\therefore A:B:C:D=4:5:\frac{35}{9}:\frac{35}{24}=288:360:280:105$

[প্রত্যেক পদকে 9 এবং 24-এর ল. সা. গু. 72 দ্বারা গুণ করিয়া]

উদা. 10. 48 লিটার জল-মিশ্রিত অম্লে, অম্ল এবং জলের অনুপাত $3:1$; উহাতে আর কি পরিমাণ জল মিশাইলে অম্ল এবং জলের অনুপাত $2:1$ হইবে ?

উঃ মনে কর, প্রদত্ত মিশ্রণটিতে জলের পরিমাণ $=x$ লিটার।

$\therefore$ অম্লের পরিমাণ $=3x$ লিটার। ($\because$ অম্ল : জল $=3:1$)

$\therefore$ শর্তানুসারে, $3x+x=48$

বা, $4x=48$ $\quad\therefore x=12$

$\therefore$ 48 লিটার জল-মিশ্রিত অম্লে 12 লিটার জল এবং 36 লিটার অম্ল আছে।

মনে কর, প্রদত্ত মিশ্রণে আরও y লিটার জল মিশ্রিত করিলে উৎপন্ন মিশ্রণটির অম্ল ও জলের অনুপাত $2:1$ হইবে।

$\therefore 36:(12+y)=2:1$

বা, $\frac{36}{12+y}=2$ বা, $36=24+2y$

বা, $2y=12$ $\quad\therefore y=6$

$\therefore$ মিশ্রণটিতে আরও 6 লিটার জল মিশ্রিত করিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 1

নিম্নের অনুপাতগুলিকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর :

1. 15 : 21
2. 3 টা. 90 প. : 26 টা.
3. 5 গজ : 1 ফু. 6 ই.
4. $1{\cdot}2^{\circ} : 1^{\circ}36'$.
5. $3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$
6. $2\frac{3}{5} : 4{\cdot}\dot{3}$.

নিম্নের অনুপাতগুলিকে পূর্ণ-সংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ কর :

7. $\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$
8. $\frac{4}{35} : \frac{11}{63}$
9. 7·6 : 6·3

নিম্নের অনুপাতগুলিতে x-এর মান নির্ণয় কর :

10. $7 : 9 :: 21 : x$
11. $\cdot 2 : \cdot 02 :: \cdot 002 : x$
12. $4\frac{1}{2} : x :: x : 3\frac{1}{8}$
13. $2\frac{1}{4} : 7\frac{1}{2} :: 7\frac{1}{2} : x$
14. $2\frac{1}{2}$ এবং $5\frac{5}{8}$ এর মধ্য সমানুপাতী কত ?

15 হইতে 19 নং প্রশ্নের সহিত প্রদত্ত উত্তরগুলি সঠিক কিনা তাহা বিচার কর :—

15. 2 : 3 এবং 4 : 9-এর মধ্যে 4 : 9 অনুপাতটি ক্ষুদ্রতর।
16. 1 : 2, 3 : 5 এবং 4 : 7-এর মধ্যে 3 : 5 অনুপাতটি বৃহত্তম।
17. 3 : 5, 5 : 9 এবং 7 : 11-এর মধ্যে 7 : 11 অনুপাতটি ক্ষুদ্রতম।
18. $2\frac{1}{4}$ এবং $7\frac{1}{2}$-এর তৃতীয় সমানুপাতীর মান $3\frac{1}{3}$ অথবা 25.
19. $2\frac{1}{2}$ এবং $5\frac{5}{8}$-এর মধ্যসমানুপাতীর মান $1\frac{1}{4}$ অথবা $3\frac{3}{4}$.
20. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5 : 11 ; বৃহত্তরটি 209 হইলে ক্ষুদ্রতরটি কত ?
21. সম-আয়তন স্বর্ণ এবং জলের ওজনের অনুপাত 37 : 2 ; 1 ঘনফুট জলের ওজন 62·5 পাউণ্ড হইলে 1 ঘনফুট স্বর্ণের ওজন কত ?
22. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 7 : 8 ; সংখ্যা দুইটির সমষ্টি 105 হইলে সংখ্যাদ্বয় নির্ণয় কর।
23. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 11 ; প্রত্যেক সংখ্যার সহিত 20 যোগ করিলে সংখ্যাদ্বয়ের ব্যস্ত অনুপাত 15 : 7 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।
24. A, B, C, D একজাতীয় রাশিগুলির A : B = 3 : 4, B : C = 5 : 7 এবং C : D = 8 : 9 হইলে দেখাও যে, D : A = 21 : 10.
25. যদি A : B = 4 : 5, B : C = 6 : 7 এবং C : D = 8 : 9 হয় তবে দেখাও যে A : B : C : D = 192 : 240 : 280 : 315.
26. A-এর আয় 3 টাকা হইলে B-এর আয় 4 টাকা এবং B-এর আয় 5 টাকা হইলে C-এর আয় 6 টাকা ; যদি A-এর আয় 120 টাকা হয় তবে C-এর আয় কত ?
27. এক ব্যক্তি 25 লিটার দুগ্ধে 5 লিটার জল এবং 18 লিটার দুগ্ধে 6 লিটার জল মিশাইল। মিশ্রণদ্বয়ের প্রতি লিটারে দুগ্ধের অনুপাত নির্ণয় কর।
28. 2, 4, 8 এবং 14 ইহাদের প্রত্যেকটির সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হইবে ?

29. 2, 4, 7-এর প্রত্যেক পদের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে যোগফলগুলি ক্রমিক অনুপাতে থাকিবে?

30. পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ। 8 বৎসর পরে উহাদের বয়সের অনুপাত 7 : 4 হইবে। পুত্রের বর্তমান বয়স কত? [C. U. '32]

31. পিতা এবং পুত্রের বর্তমান বয়সের অনুপাত 4 : 1 এবং 7 বৎসর পূর্বে উহাদের বয়সের অনুপাত 15 : 2 ছিল। পিতার বর্তমান বয়স কত?

32. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 30, বৃহত্তর সংখ্যার সহিত 10 যোগ এবং ক্ষুদ্রতর সংখ্যা হইতে 10 বিয়োগ করিলে উহাদের অনুপাত 8 : 7 হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

33. একটি দুই অঙ্কের সংখ্যার এককের স্থানের অঙ্কটি দশকের স্থানের অঙ্কের অর্ধেক। অঙ্ক দুইটি স্থান পরিবর্তন করিলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তাহার সহিত 60-এর অনুপাত 2 : 5; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

34. কোন পরীক্ষায় যত ছাত্র অনুত্তীর্ণ হইল তাহার তিনগুণ ছাত্র উত্তীর্ণ হইল। যদি 11 জন ছাত্র কম উত্তীর্ণ হইত তবে উত্তীর্ণ এবং অনুত্তীর্ণ ছাত্রের অনুপাত 2 : 1 হইত। কতজন ছাত্র পরীক্ষা দিয়াছিল?

35. দুইটি একই অঙ্কদ্বারা গঠিত দুই অঙ্কের দুইটি সংখ্যার অনুপাত 4 : 7 এবং ঐ সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল 99; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

36. চারিটি সংখ্যার অনুপাত 2 : 5 : 6 : 7 এবং সংখ্যাগুলির বর্গের সমষ্টি 1026; সংখ্যা চারিটি নির্ণয় কর।

37. কোন পাত্রের জলমিশ্রিত অ্যালকোহলে জল এবং অ্যালকোহলের অনুপাত 2 : 7; ঐ পাত্রে আরও 5 লিটার অ্যালকোহল মিশ্রিত করাতে উহাদের অনুপাত 2 : 9 হইল। প্রথম মিশ্রণটিতে জলের পরিমাণ কত?

38. 63 গ্রাম সংকর ধাতুতে সীসা এবং দস্তার অনুপাত 4 : 3; মিশ্রণটিতে কি পরিমাণ দস্তা মিশ্রিত করিতে ধাতু দুইটির অনুপাত 3 : 4 হইবে?

39. একটি কুকুর একটি শশককে তাড়া করিল। কুকুরটি যে সময়ে 2 লাফ দেয়, শশকটি সেই সময়ে 6 লাফ দেয়; কিন্তু কুকুরটি 4 লাফে যতদূর যায়, শশকটি 5 লাফে ততদূর যায়। কুকুর ও শশকের গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় কর।

40. সমগ্র পৃথিবীর স্থল ও জলের অনুপাত 1 : 2 এবং উত্তর গোলার্ধে উহা 2 : 3; দক্ষিণ গোলার্ধে উহা কত হইবে? [B. C. S. '47]

5. সমানুপাতিক ভাগহার (Division into proportional parts):

কোন প্রদত্ত রাশিকে কতকগুলি প্রদত্ত সংখ্যার ক্রমিক অনুপাত অনুসারে বিভিন্ন অংশে বিভক্ত করাকে **সমানুপাতিক ভাগহার** (Division into proportional parts) বলে। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদা. 1. 33,630 টাকা A, B এবং C-এর মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন A ও B-এর অংশের অনুপাত 3 : 7 এবং B ও C-এর অংশের অনুপাত 6 : 5 হয়।

উঃ এখানে, $\frac{\text{A-এর অংশ}}{\text{B-এর অংশ}}=\frac{3}{7}=\frac{3\times6}{7\times6}=\frac{18}{42}$; $\frac{\text{B-এর অংশ}}{\text{C-এর অংশ}}=\frac{6}{5}=\frac{6\times7}{5\times7}=\frac{42}{35}$

∴ A-এর অংশ : B-এর অংশ : C-এর অংশ $=18:42:35$.

মনে কর, A পায় $18x$ টাকা, B পায় $42x$ টাকা এবং C পায় $35x$ টাকা।

∴ প্রশ্নানুসারে, $18x+42x+35x=33{,}630$ বা, $95x=33{,}630$

$$\therefore\ x=\frac{33{,}630}{95}=354$$

∴ A পায় $=(18\times354)$ টাকা $=6372$ টাকা ; B পায় $=(42\times354)$ টাকা $=14868$ টাকা এবং C পায় $=(35\times354)$ টাকা $=12390$ টাকা।

উদা. 2. 594 কিলো গম 5 জন পুরুষ, 7 জন স্ত্রীলোক এবং 10 জন বালকের মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যে প্রত্যেক স্ত্রীলোক প্রত্যেক পুরুষের $\frac{3}{5}$ অংশ এবং প্রত্যেক বালক প্রত্যেক স্ত্রীলোকের $\frac{2}{3}$ অংশ পায়।

উঃ মনে কর, একজন পুরুষ x কিলো গম পায়। অতএব, একজন স্ত্রীলোক $\frac{3}{5}$ কিলে এবং একজন বালক ($\frac{3x}{5}$ এর $\frac{2}{3}$) কিলো অর্থাৎ ($\frac{2x}{5}$) কিলো গম পাইবে।

∴ 5 জন পুরুষ $5x$ কিলো, 7 জন স্ত্রীলোক ($\frac{3x}{5}\times7$) কিলো বা, $\frac{21x}{5}$ কিলো এবং 10 জন বালক ($\frac{2x}{5}\times10$) কিলো বা $4x$ কিলো গম পায়।

∴ শর্তানুসারে, $5x+\frac{21x}{5}+4x=594$

বা, $\frac{66x}{5}=594$; অতএব, $x=45$

∴ 5 জন পুরুষ গম পায় $=(5\times45)$ কিলো $=225$ কিলো ;

7 জন স্ত্রীলোক গম পায় $=(\frac{21\times45}{5})$ কিলো $=189$ কিলো ;

10 জন বালক গম পায় $=(4\times45)$ কিলো $=180$ কিলো।

উদা. 3. একটি থলিতে এক টাকা, আট আনা এবং কুড়ি পয়সাতে মোট 483 টাকা মূল্যের মুদ্রা আছে। মুদ্রাগুলির সংখ্যার অনুপাত 3 : 5 : 7 হইলে কোন প্রকারের মুদ্রা কয়টি আছে ?

উঃ মনে কর, এক টাকার মুদ্রার সংখ্যা $=3x$;

∴ টাকার মুদ্রার মূল্য $=3x$ টাকা।

আট আনার মুদ্রার সংখ্যা $=5x$; ∴ আট আনার মুদ্রার মূল্য $=\frac{5x}{2}$ টাকা।

কুড়ি পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $=7x$; ∴ কুড়ি পয়সার মুদ্রার মূল্য $=\frac{7x}{5}$ টাকা।

$$\therefore\ \text{প্রশ্নানুসারে,}\ 3x+\frac{5x}{2}+\frac{7x}{5}=483$$

$$\text{বা,}\ \frac{69x}{10}=483\ ;\ \therefore\ x=70$$

∴ টাকায় মুদ্রার সংখ্যা $=(3\times70)$টি $=210$টি, আট আনার মুদ্রার সংখ্যা $=(5\times70)$টি $=350$টি এবং কুড়ি পয়সার মুদ্রার সংখ্যা $=(7\times70)$টি $=490$টি।

6. সম্ভূয় সমুত্থান (Partnership) :

দুই বা ততোধিক ব্যক্তি কর্তৃক পরিচালিত কোন ব্যবসায়ের লাভ বা ক্ষতির পরিমাণ উক্ত অংশীদারগণের মধ্যে যথাযথভাবে ভাগ করিয়া দিবার প্রণালীকে **সম্ভূয় সমুত্থান** (Partnearship) বলে।

যদি প্রত্যেক অংশীদারের মূলধন একই সময় ধরিয়া ব্যবসায়ে খাটিয়া থাকে তবে ব্যবসায়ের লাভের (বা ক্ষতির) পরিমাণকে উহাদের দ্বারা নিয়োজিত মূলধনগুলির অনুপাতে অংশীদারগণের মধ্যে বণ্টন করা হয়। এই প্রণালীকে **সরল সম্ভূয় সমুত্থান** বলে।

অংশীদারগণ যদি তাহাদের মূলধন সমান সময় ব্যাপিয়া ব্যবসায়ে না খাটায় তবে ব্যবসায়ের লাভ বা ক্ষতি অংশীদারগণের মধ্যে উহাদের প্রত্যেকের মূলধন ও সময়ের গুণফলের অনুপাতে বণ্টন করা হয়। উক্ত প্রণালীকে **মিশ্র সম্ভূয় সমুত্থান** বলে।

নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদা. 1. A, B ও C যথাক্রমে 12,000 টাকা, 16,000 টাকা এবং 20,000 টাকা মূলধন লইয়া একত্রে ব্যবসা আরম্ভ করিল। ব্যবসায়ে মোট 7,200 টাকা লাভ হইলে লভ্যাংশ কে কত পাইল ? [D. B. '52]

উঃ এক্ষেত্রে, A-এর মূলধন : B-এর মূলধন : C-এর মূলধন

$= 12,000 : 16,000 : 20,000 = 3 : 4 : 5$

যেহেতু উহাদের মূলধন একই সময় ধরিয়া খাটিয়াছে, অতএব ব্যবসায়ের লাভ নিয়োজিত মূলধনগুলির অনুপাতে উহাদের মধ্যে বণ্টন করা হইবে।

মনে কর, A-এর লভ্যাংশ $= 3x$, B-এর লভ্যাংশ $= 4x$ এবং C-এর লভ্যাংশ $= 5x$.

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $3x + 4x + 5x = 7,200$ টাকা

বা, $12x = 7,200$ টাকা ; $\therefore$ $x = 600$ টাকা।

$\therefore$ A-এর লভ্যাংশ $= (3 \times 600)$ টাকা $= 1,800$ টাকা,

B-এর লভ্যাংশ $= (4 \times 600)$ টাকা $= 2,400$ টাকা,

এবং C-এর লভ্যাংশ $= (5 \times 600)$ টাকা $= 3,000$ টাকা।

উদা. 2. একজন ব্যবসায়ী ব্যবসা আরম্ভ করিবার 3 মাস, 5 মাস এবং 6 মাস পরে আরও 3 জন অংশীদার লইল। বৎসরান্তে ব্যবসায়ে 1,012 টাকা লাভ হইল। যদি উহারা যথাক্রমে 400 টাকা, 450 টাকা, 480 টাকা এবং 495 টাকা নিয়োগ করিয়া থাকে, তবে প্রত্যেকের লভ্যাংশ নির্ণয় কর।

উঃ এখানে 1ম, 2য়, 3য় ও 4র্থ ব্যবসায়ীর মূলধন যথাক্রমে 12 মাস, 9 মাস, 7 মাস ও 6 মাস খাটানো হইয়াছে।

এখন, 1ম ব্যবসায়ীর 400 টাকার 12 মাসের লাভ = 4,800 টাকার 1 মাসের লাভ ;

2য়	,,	450	,,	9	,, ,,	= 4,050	,,	1	,, ,,
3য়	,,	480	,,	7	,, ,,	= 3,360	,,	1	,, ,,
4র্থ	,,	495	,,	6	,, ,,	= 2,970	,,	1	,, ,,

∴ 1ম ব্যবসায়ীর লভ্যাংশ : 2য় ব্যবসায়ীর লভ্যাংশ : 3য় ব্যবসায়ীর লভ্যাংশ : 4র্থ ব্যবসায়ীর লভ্যাংশ $=4800:4050:3360:2970=160:135:112:99$

মনে কর, 1ম, 2য়, 3য় এবং 4র্থ ব্যবসায়ীর লভ্যাংশ যথাক্রমে $160x$, $135x$, $112x$ এবং $99x$.

∴ প্রশ্নানুসারে, $160x+135x+112x+99x=1012$ টাকা

বা, $506x=1012$ টাকা ; ∴ $x=2$ টাকা।

∴ 1ম ব্যবসায়ীর লভ্যাংশ $=(160\times 2)$ টাকা $=320$ টাকা,

2য় ,, ,, $=(135\times 2)$ টাকা $=270$ টাকা,

3য় ,, ,, $=(112\times 2)$ টাকা $=224$ টাকা,

4র্থ ,, ,, $=(99\times 2)$ টাকা $=198$ টাকা।

উদা. 8. A, B ও C কোন যৌথ ব্যবসায়ে যথাক্রমে 5,000 টাকা, 3,000 টাকা এবং 2,500 টাকা মূলধন হিসাবে এই শর্তে নিয়োজিত করিল যে C ম্যানেজার হিসাবে মোট লাভের $\frac{1}{8}$ অংশ পাইবে এবং লাভের বাকী অংশ তাহাদের মধ্যে মূলধনের অনুপাতে বণ্টন করা হইবে। বৎসরান্তে যদি C, 280 টাকা পাইয়া থাকে তবে A এবং B কত টাকা পাইয়াছিল ?

উঃ মনে কর, মোট লাভ $=y$ টাকা।

∴ ম্যানেজার হিসাবে C পায় $=\frac{y}{8}$ টাকা এবং বাকী $(y-\frac{y}{8})$ টাকা।

বা, $\frac{7y}{8}$ টাকা A, B এবং C-এর মধ্যে উহাদের মূলধনের অনুপাত বণ্টন করা হয়।

এখন A-এর মূলধন : B-এর মূলধন : C-এর মূলধন $=5000:3000:2500=10:6:5$.

মনে কর, A-এর লভ্যাংশ $=10x$ টাকা, B-এর লভ্যাংশ $=6x$ টাকা এবং C-এর লভ্যাংশ $=5x$ টাকা।

∴ প্রশ্নানুসারে, $10x+6x+5x=\frac{7y}{8}$; বা, $21x=\frac{7y}{8}$;

∴ $y=24x$

আবার C-এর লভ্যাংশ এবং $\frac{y}{8}$ টাকার সমষ্টি 280 টাকা বলিয়া, $5x+\frac{y}{8}=280$

বা, $5x+\frac{24x}{8}=280$; বা, $8x=280$; ∴ $x=35$

∴ A-এর লভ্যাংশ $=(10\times 35)$ টাকা $=350$ টাকা এবং B-এর লভ্যাংশ $=(6\times 35)$ টাকা $=210$ টাকা।

প্রশ্নমালা 2

1. একটি পরীক্ষাকেন্দ্রে 342 জন ছাত্র পরীক্ষা দিয়াছিল। যদি ঐ কেন্দ্রের উত্তীর্ণ এবং অনুত্তীর্ণ ছাত্রদের অনুপাত 11 : 7 হয়; তবে কতজন ছাত্র উত্তীর্ণ হইয়াছিল ?

2. 10,400 টাকা A, B এবং C-এর মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন তাহাদের অংশগুলির অনুপাত 3 : 6 : 4 হয়।

3. কোন যৌথ ব্যবসায়ে A, B এবং C-এর মূলধনের অনুপাত যথাক্রমে 4 : 3 : 2 ; যদি ব্যবসায়ে 15,453 টাকা লাভ হইয়া থাকে তবে লভ্যাংশ কে কত পাইবে ?

4. কিছু টাকা A, B ও C-এর মধ্যে 5 : 6 : 9 অনুপাতে ভাগ করিয়া দেওয়াতে A, 45 টাকা পাইল। মোট টাকার পরিমাণ কত ?

5. P, Q এবং R-এর বয়সের অনুপাত $3\frac{3}{4}$: 4 : 5·5 ; যদি কনিষ্ঠের বয়স 30 বৎসর হয়, তবে উহাদের বয়সের সমষ্টি কত ?

6. একটি থলিতে টাকা, আধুলি ও সিকি মিলিয়া মোট 150 টাকা আছে। যদি ঐ মুদ্রাগুলির সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 : 5 হয়, তবে প্রত্যেক প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা নির্ণয় কর।

7. আমার কাছে এক টাকা, 50 পয়সা এবং 25 পয়সা মুদ্রা মিলিয়া মোট 420টি মুদ্রা আছে। যদি উহাদের মূল্যের অনুপাত 12 : 7 : 4 হয়, তবে উহাদের সংখ্যার অনুপাত নির্ণয় কর।

8. A, B ও C ক্রিকেট খেলায় মোট 342 রাণ করিল। A ও B-এর রাণের অনুপাত এবং B ও C-এর রাণের অনুপাত 3 : 2 হইলে কে কত রাণ করিয়াছিল।

[S. F. '69 (C)]

9. A, B এবং C-এর মধ্যে 7100 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যাহাতে A, 5 টাকা পাইলে B, 3 টাকা পায় এবং B, 7 টাকা পাইলে C, 5 টাকা পায়।

10. কোন বিদ্যালয়ে তিনটি শ্রেণীর মোট ছাত্রসংখ্যা 333 জন। প্রথম ও দ্বিতীয় শ্রেণীর ছাত্র-সংখ্যার অনুপাত 3 : 5 এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যার অনুপাত 7 : 11 ; প্রত্যেক শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর। [S. F. '65]

11. P, Q এবং R-এর মধ্যে 870 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যাহাতে R-এর 0·75 অংশ, P-এর 0·5 অংশ বা Q-এর 0·6 অংশের সমান হয়।

12. A, B, C এবং D একত্রে একটি 32,850 টাকার সম্পত্তি ক্রয় করিয়া পরস্পর ভাগ করিয়া লইল। যদি A-এর অংশ : B-এর অংশ = 2 : 3, B-এর অংশ : C-এর অংশ = 4 : 5 এবং C-এর অংশ : D-এর অংশ = 7 : 8 হয়, তবে C কত টাকা মূল্যের সম্পত্তি পাইয়াছিল ?

13. তামা, দস্তা, সীসা এবং টিন দ্বারা তৈয়ারী একটি কাঁসার পাত্রে তামা ও দস্তার অনুপাত 1 : 2, দস্তা ও সীসার অনুপাত 3 : 5 এবং সীসা ও টিনের অনুপাত 7 : 8 হইলে, 3·45 কিলোগ্রামের পাত্রটিতে কতটুকু সীসা আছে ?

14. কয়েকজন পুরুষ, স্ত্রীলোক এবং বালকের অনুপাত 5 : 4 : 7 ; উহাদের মধ্যে 178 টা. 50 প. এরূপে ভাগ করিয়া দাও যাহাতে প্রত্যেক পুরুষ, স্ত্রীলোক এবং বালকের অংশের অনুপাত 3 : 2 : 1 হয়।

15. কিছু টাকা A, B এবং C-এর মধ্যে 3 : $2\frac{1}{2}$: $3\frac{1}{3}$ অনুপাতে ভাগ করিয়া

দেওয়া হইল। A যাহা পাইল তাহার $\frac{2}{3}$ অংশ B কে দেওয়াতে B-এর টাকা মোট টাকার অর্ধেক অপেক্ষা 25 টাকা বেশী হইল। C কত টাকা পাইয়াছিল?

16. A, B ও C যথাক্রমে, 5,000 টাকা, 2,000 টাকা ও 3,000 টাকা মূলধন লইয়া একটি ব্যবসায় আরম্ভ করিল। ব্যবসায়ে তাহাদের মোট 750 টাকা লাভ হইলে, কে কত লভ্যাংশ পাইবে? [S, F. '54]

17. সঞ্জীব 450 টাকা লইয়া ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 6 মাস পরে অমল 600 টাকা এবং আরও 4 মাস পরে শিবু 900 টাকা লইয়া উক্ত ব্যবসায়ে যোগ দিল। যদি বৎসরান্তে ব্যবসায়ে 3,000 টাকা লাভ হইয়া থাকে, তবে লভ্যাংশ কে কত পাইবে?

18. A, B, C ও D একটি যৌথ ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 1লা জানুয়ারী A 1,200 টাকা, 1লা এপ্রিল B 1,500 টাকা, 1লা জুলাই C 1,800 টাকা এবং 1লা অক্টোবর D 2,100 টাকা মূলধন ঐ ব্যবসায়ে নিয়োগ করিল। বৎসরান্তে তাহাদের মোট লাভ 900 টাকা হইলে, লভ্যাংশ কে কত পাইবে? [D, B. '32]

19. রাজকুমার ও অরবিন্দ একটি ব্যবসায় আরম্ভ করিল। রাজকুমার 9 মাসের জন্যে 500 টাকা এবং অরবিন্দ 6 মাসের জন্যে কিছু টাকা ঐ ব্যবসায়ে খাটাইল। ব্যবসায়ে মোট 69 টাকা লাভ হওয়াতে অরবিন্দ 46 টাকা পাইল। অরবিন্দ কত মূলধন দিয়াছিল?

20. A, B এবং C যথাক্রমে 300 টাকা, 200 টাকা ও 150 টাকা দিয়া যৌথ ভাবে একটি ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 4 মাস পরে A তাহার মূলধনের $\frac{1}{2}$ অংশ তুলিয়া লইল। আরও 9 মাস পরে ব্যবসায়ে মোট 284 টাকা লাভ হইলে, A, B এবং C-এর লভ্যাংশ নির্ণয় কর। [S. F. '59]

21. A, B ও C কোন যৌথ কারবারে 1500 টাকা লাভ করিল। যদি A-এর মূলধন : B-এর মূলধন = 2 : 3 এবং B-এর মূলধন : C এর মূলধন = 2 : 5 হয়, তবে লাভের অংশ কে কত পাইবে? [S. F. '69]

22. একটি ব্যবসায়ে P, Q এবং R, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ অনুপাতে মূলধন নিয়োজিত করিল। 4 মাস পরে P তাহার মূলধনের $\frac{1}{2}$ অংশ তুলিয়া লইল। ইহার 8 মাস পরে যদি মোট 2024 টাকা লাভ হইয়া থাকে, তবে P-এর লভ্যাংশ নির্ণয় কর।

23. তিনজন চাষী A, B ও C একটি মাঠে গরু চরায়। ঐ মাঠে A-এর 10টি গরু 7 মাস, B-এর 12টি গরু 5 মাস ও C-এর 15টি গরু 3 মাস চরে। মাঠের খাজনা 17 টা. 50 পয়সা হইলে, খাজনা বাবদ কে কত দিবে? [S. F. '58]

24. A এবং B যথাক্রমে 2000 টাকা এবং 3000 টাকা দিয়া এই শর্তে ব্যবসায় আরম্ভ করিল যে মোট লাভের $\frac{1}{4}$ অংশ A ম্যানেজার হিসাবে পাইবে এবং বাকী লভ্যাংশ তাহারা তাহাদের মূলধনের অনুপাতে ভাগ করিয়া লইবে। যদি B 210 টাকা পাইয়া থাকে, তবে A কত পাইয়াছিল?

25. A, B এবং C একত্রে কোন ব্যবসায় আরম্ভ করিল। ঐ ব্যবসায়ে A 5000 টাকা, B 1000 টাকা এবং C কিছু পরিমাণ টাকা দিল। C, 3 মাস পরে

3. কোন যৌথ ব্যবসায়ে A, B এবং C-এর মূলধনের অনুপাত যথাক্রমে 4 : 3 : 2 ; যদি ব্যবসায়ে 15,453 টাকা লাভ হইয়া থাকে তবে লভ্যাংশ কে কত পাইবে ?

4. কিছু টাকা A, B ও C-এর মধ্যে 5 : 6 : 9 অনুপাতে ভাগ করিয়া দেওয়াতে A, 45 টাকা পাইল। মোট টাকার পরিমাণ কত ?

5. P, Q এবং R-এর বয়সের অনুপাত $3\frac{3}{4} : 4 : 5\cdot5$; যদি কনিষ্ঠের বয়স 30 বৎসর হয়, তবে উহাদের বয়সের সমষ্টি কত ?

6. একটি থলিতে টাকা, আধুলি ও সিকি মিলিয়া মোট 150 টাকা আছে। যদি ঐ মুদ্রাগুলির সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 : 5 হয়, তবে প্রত্যেক প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা নির্ণয় কর।

7. আমার কাছে এক টাকা, 50 পয়সা এবং 25 পয়সা মুদ্রা মিলিয়া মোট 420টি মুদ্রা আছে। যদি উহাদের মূল্যের অনুপাত 12 : 7 : 4 হয়, তবে উহাদের সংখ্যার অনুপাত নির্ণয় কর।

8. A, B ও C ক্রিকেট খেলায় মোট 342 রাণ করিল। A ও B-এর রাণের অনুপাত এবং B ও C-এর রাণের অনুপাত 3 : 2 হইলে কে কত রাণ করিয়াছিল।
[S. F. '69 (C)]

9. A, B এবং C-এর মধ্যে 7100 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যাহাতে A, 5 টাকা পাইলে B, 3 টাকা পায় এবং B, 7 টাকা পাইলে C, 5 টাকা পায়।

10. কোন বিদ্যালয়ে তিনটি শ্রেণীর মোট ছাত্রসংখ্যা 333 জন। প্রথম ও দ্বিতীয় শ্রেণীর ছাত্র-সংখ্যার অনুপাত 3 : 5 এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যার অনুপাত 7 : 11 ; প্রত্যেক শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর। [S. F. '65]

11. P, Q এবং R-এর মধ্যে 870 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যাহাতে R-এর 0·75 অংশ, P-এর 0·5 অংশ বা Q-এর 0·6 অংশের সমান হয়।

12. A, B, C এবং D একত্রে একটি 32,850 টাকার সম্পত্তি ক্রয় করিয়া পরস্পর ভাগ করিয়া লইল। যদি A-এর অংশ : B-এর অংশ = 2 : 3, B-এর অংশ : C-এর অংশ = 4 : 5 এবং C-এর অংশ : D-এর অংশ = 7 : 8 হয়, তবে C কত টাকা মূল্যের সম্পত্তি পাইয়াছিল ?

13. তামা, দস্তা, সীসা এবং টিন দ্বারা তৈয়ারী একটি কাঁসার পাত্রে তামা ও দস্তার অনুপাত 1 : 2, দস্তা ও সীসার অনুপাত 3 : 5 এবং সীসা ও টিনের অনুপাত 7 : 8 হইলে, 3·45 কিলোগ্রামের পাত্রটিতে কতটুকু সীসা আছে ?

14. কয়েকজন পুরুষ, স্ত্রীলোক এবং বালকের অনুপাত 5 : 4 : 7 ; উহাদের মধ্যে 178 টা. 50 প. এরূপে ভাগ করিয়া দাও যাহাতে প্রত্যেক পুরুষ, স্ত্রীলোক এবং বালকের অংশের অনুপাত 3 : 2 : 1 হয়।

15. কিছু টাকা A, B এবং C-এর মধ্যে $3 : 2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$ অনুপাতে ভাগ করিয়া

দেওয়া হইল। A যাহা পাইল তাহার $\frac{2}{3}$ অংশ B কে দেওয়াতে B-এর টাকা মোট টাকার অর্ধেক অপেক্ষা 25 টাকা বেশী হইল। C কত টাকা পাইয়াছিল ?

16. A, B ও C যথাক্রমে, 5,000 টাকা, 2,000 টাকা ও 3,000 টাকা মূলধন লইয়া একটি ব্যবসায় আরম্ভ করিল। ব্যবসায়ে তাহাদের মোট 750 টাকা লাভ হইলে, কে কত লভ্যাংশ পাইবে ? [S, F. '54]

17. সঞ্জীব 450 টাকা লইয়া ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 6 মাস পরে অমল 600 টাকা এবং আরও 4 মাস পরে শিবু 900 টাকা লইয়া উক্ত ব্যবসায়ে যোগ দিল। যদি বৎসরান্তে ব্যবসায়ে 3,000 টাকা লাভ হইয়া থাকে, তবে লভ্যাংশ কে কত পাইবে ?

18. A, B, C ও D একটি যৌথ ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 1লা জানুয়ারী A 1,200 টাকা, 1লা এপ্রিল B 1,500 টাকা, 1লা জুলাই C 1,800 টাকা এবং 1লা অক্টোবর D 2,100 টাকা মূলধন ঐ ব্যবসায়ে নিয়োগ করিল। বৎসরান্তে তাহাদের মোট লাভ 900 টাকা হইলে, লভ্যাংশ কে কত পাইবে ? [D, B. '32]

19. রাজকুমার ও অরবিন্দ একটি ব্যবসায় আরম্ভ করিল। রাজকুমার 9 মাসের জন্যে 500 টাকা এবং অরবিন্দ 6 মাসের জন্যে কিছু টাকা ঐ ব্যবসায়ে খাটাইল। ব্যবসায়ে মোট 69 টাকা লাভ হওয়াতে অরবিন্দ 46 টাকা পাইল। অরবিন্দ কত মূলধন দিয়াছিল ?

20. A, B এবং C যথাক্রমে 300 টাকা, 200 টাকা ও 150 টাকা দিয়া যৌথ ভাবে একটি ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 4 মাস পরে A তাহার মূলধনের $\frac{1}{2}$ অংশ তুলিয়া লইল। আরও 9 মাস পরে ব্যবসায়ে মোট 284 টাকা লাভ হইলে, A, B এবং C-এর লভ্যাংশ নির্ণয় কর। [S. F. '59]

21. A, B ও C কোন যৌথ কারবারে 1500 টাকা লাভ করিল। যদি A-এর মূলধন : B-এর মূলধন = 2 : 3 এবং B-এর মূলধন : C এর মূলধন = 2 : 5 হয়, তবে লাভের অংশ কে কত পাইবে ? [S. F. '69]

22. একটি ব্যবসায়ে P, Q এবং R, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ অনুপাতে মূলধন নিয়োজিত করিল। 4 মাস পরে P তাহার মূলধনের $\frac{1}{2}$ অংশ তুলিয়া লইল। ইহার 8 মাস পরে যদি মোট 2024 টাকা লাভ হইয়া থাকে, তবে P-এর লভ্যাংশ নির্ণয় কর।

23. তিনজন চাষী A, B ও C একটি মাঠে গরু চরায়। ঐ মাঠে A-এর 10টি গরু 7 মাস, B-এর 12টি গরু 5 মাস ও C-এর 15টি গরু 3 মাস চরে। মাঠের খাজনা 17 টা. 50 পয়সা হইলে, খাজনা বাবদ কে কত দিবে ? [S. F. '58]

24. A এবং B যথাক্রমে 2000 টাকা এবং 3000 টাকা দিয়া এই শর্তে ব্যবসায় আরম্ভ করিল যে মোট লাভের $\frac{1}{4}$ অংশ A ম্যানেজার হিসাবে পাইবে এবং বাকী লভ্যাংশ তাহারা তাহাদের মূলধনের অনুপাতে ভাগ করিয়া লইবে। যদি B 210 টাকা পাইয়া থাকে, তবে A কত পাইয়াছিল ?

25. A, B এবং C একত্রে কোন ব্যবসায় আরম্ভ করিল। ঐ ব্যবসায়ে A 5000 টাকা, B 1000 টাকা এবং C কিছু পরিমাণ টাকা দিল। C, 3 মাস পরে

এবং A, 5 মাস পরে তাহাদের মূলধন তুলিয়া লইল। যদি বৎসরান্তে A ও C-এর লভ্যাংশ যথাক্রমে 800 টাকা এবং 288 টাকা হয়, তবে C-এর মূলধন এবং B-এর লভ্যাংশ নির্ণয় কর।

26. একটি যৌথ ব্যবসায়ে B-এর মূলধন A-এর মূলধনের দেড়গুণ ছিল। 8 মাস পরে B তাহার মূলধনের $\frac{1}{2}$ অংশ এবং আরও 2 মাস পরে A তাহার মূলধনের $\frac{1}{4}$ অংশ তুলিয়া নিল। বৎসরান্তে 530 টাকা লাভ হইলে কে কত লভ্যাংশ পাইবে?

27. কোন ব্যবসায়ে A, B ও C যথাক্রমে 10,000 টাকা, 14,000 টাকা এবং 24,000 টাকা এইরূপে নিয়োগ করিল যে তাহারা তাহাদের লাভের $6\frac{1}{4}\%$ কাজটি দেখাশুনা করিবার জন্যে A-কে দিবে এবং বাকী লভ্যাংশ নিজেদের মধ্যে মূলধনের অনুপাতে ভাগ করিয়া লইবে। যদি A 3,729 টাকা পাইয়া থাকে তবে B এবং C এর লভ্যাংশ কত?

[G. U. '52]

28. A ও B যথাক্রমে 6,200 টাকা ও 9,100 টাকা মূলধন দিয়া একটি যৌথ ব্যবসায় এই শর্তে আরম্ভ করিল যে লাভের 15% ব্যবসায়ের তত্ত্বাবধানের জন্য A পাইবে এবং অবশিষ্টের 10% রিজার্ভ রাখিয়া বাকী টাকা মূলধনের অনুপাতে উহাদের মধ্যে ভাগ হইবে। বৎসরান্তে B 4,550 টাকা পাইলে, A কত পাইবে?

7. ত্রৈরাশিক (Rule of three) :

ঐকিক নিয়মের সাহায্যে তোমরা যে সকল সমস্যার সমাধান করিয়াছ সেইগুলি ত্রৈরাশিক প্রণালীর সাহায্যেও সমাধান করা যায়। প্রণালীটি চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয়ের অনুরূপ। এক্ষেত্রে সমানুপাতী চারটি রাশির মধ্যে তিনটি রাশি জ্ঞাত থাকে। প্রশ্নানুসারে উহাদের সাহায্যে সমানুপাত গঠন করিয়া চতুর্থ অজ্ঞাত রাশিটি নির্ণয় করা হয়। উক্ত জ্ঞাত রাশি তিনটির মধ্যে দুইটি একজাতীয় এবং অন্যটি ভিন্ন জাতীয় থাকে। অজ্ঞাত রাশিটিকে 'x' ধরিয়া উহাকে সমানুপাতটির চতুর্থ পদের স্থানে এবং অজ্ঞাত রাশিটির সমজাতীয় রাশিটিকে তৃতীয় পদের স্থানে বসাইতে হয়। প্রশ্নটির প্রকৃতি বিবেচনা করিয়া যদি দেখা যায় চতুর্থ পদটি তৃতীয় পদ অপেক্ষা বৃহত্তর তবে অপর জ্ঞাত রাশিদ্বয়ের বৃহত্তর রাশিটিকে দ্বিতীয় পদের স্থানে বসাইয়া সমানুপাত গঠন করিতে হইবে; কিন্তু চতুর্থ পদটি তৃতীয় পদ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বিবেচিত হইলে উপরোক্ত প্রক্রিয়ার বিপরীত প্রক্রিয়া দ্বারা সমানুপাত গঠন করিতে হইবে। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদা. 1. 12 জন লোক একটি কাজ 15 দিনে করিতে পারে। 10 জন লোক ঐ কাজটি কতদিনে করিতে পারিবে?

উঃ মনে কর, 10 জন লোক উক্ত কাজটি x দিনে করিতে পারে।

∴ এক্ষেত্রে সমানুপাতটির চতুর্থ পদটি $=x$ এবং তৃতীয় পদ $=15$;

কাজটি ধ্রুবক থাকায় দরুন লোকের সংখ্যা হ্রাসের সঙ্গে দিনের সংখ্যা বৃদ্ধি পায়। অতএব এক্ষেত্রে x-এর মান 15 অপেক্ষা বেশী হইবে।

∴ সমানুপাতটির দ্বিতীয় পদ $=12$ এবং প্রথম পদ $=10$।

∴ $10:12=15:x$; বা, $x=\frac{15\times12}{10}=18$

∴ 10 জন লোক কাজটি 18 দিনে করিতে পারে।

উদা. 2. যদি 7 জন পুরুষ বা 11 জন স্ত্রীলোক কোন কাজ 10 দিনে করিতে পারে, তবে 21 জন পুরুষ ও 7 জন স্ত্রীলোক কাজটি কতদিনে করিবে ?

উঃ এখানে 7 জন পুরুষ $=11$ জন স্ত্রীলোক।

∴ 1 „ „ $=\frac{11}{7}$ „ „

∴ 21 „ „ $=\frac{11\times21}{7}=33$ জন স্ত্রীলোক।

∴ (21 জন পুরুষ $+7$ জন স্ত্রীলোক) $=(33+7)$ জন স্ত্রীলোক $=40$ জন স্ত্রীলোক। মনে কর, উহারা x দিনে কাজটি শেষ করিবে।

∴ প্রশ্নানুসারে, $40:11=10:x$ বা, $x=\frac{11\times10}{40}=2\frac{3}{4}$

∴ নির্ণেয় সময় $=2\frac{3}{4}$ দিন।

উদা. 3. প্রত্যহ 6 ঘণ্টা কাজ করিয়া 70 জন লোক 36 দিনে 105 মিটার দীর্ঘ এবং 40 মিটার প্রশস্ত একটি জমি চাষ করিতে পারে। প্রত্যহ কত ঘণ্টা কাজ করিয়া 264 জন লোক 10 দিনে 125 মিটার দীর্ঘ এবং 44 মিটার প্রশস্ত জমি চাষ করিতে পারিবে ?

উঃ মনে কর, উহারা প্রত্যহ x ঘণ্টা খাটিবে।

এখন প্রত্যহ 6 ঘণ্টা কাজ করিয়া 70 জন লোক (105×40) বর্গমিটার ক্ষেত্রফলযুক্ত জমি 36 দিনে চাষ করিতে পারে।

∴ $(70\times36\times6)$ জন লোক 1 ঘণ্টা খাটিয়া ঐ জমি চাষ করিতে পারে।

অনুরূপে $(264\times10\times x)$ জন লোক 1 ঘণ্টায় 125×44) বর্গ মিটার ক্ষেত্রফলযুক্ত জমি চাষ করিতে পারে।

এখন নির্দিষ্ট সময়ে বেশী পরিমাণ কাজ করিতে অধিক লোকের প্রয়োজন।

অতএব প্রশ্নানুসারে, $(105\times40):(125\times44)$

$$=(70\times36\times6):(264\times10\times x)$$

∴ $264\times10\times x\times105\times40=70\times36\times6\times125\times44$

বা, $x=\frac{70\times36\times6\times125\times44}{264\times10\times105\times40}=7\frac{1}{2}$

অতএব উহাদের প্রত্যহ $7\frac{1}{2}$ ঘণ্টা করিয়া খাটিতে হইবে।

8. শৃঙ্খল নিয়ম (Chain rule) :

ঐকিক নিয়মের বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করিবার জন্য বারংবার ত্রৈরাশিকের প্রয়োগ না করিয়া প্রশ্নের অন্তর্গত বিষয়গুলিকে শৃঙ্খলাকারে সাজাইয়া লইয়া অতি সহজেই সমস্যাগুলির সমাধান করা যায়। এইরূপ প্রণালীকে **শৃঙ্খল নিয়ম** (Chain rule) বলে। নিম্নের উদাহরণটি দেখ।

উদা. 4. A যে কাজ 6 দিনে করে B তাহা 8 দিনে করিতে পারে। B যে

কাজ 10 দিনে করিতে পারে C তাহা 12 দিনে করে। C কোন কাজ 32 দিনে করিলে A তাহা কত দিনে করিবে ?

উঃ মনে কর, A কাজটি x দিনে করিবে।

$\therefore$ A-এর x দিনের কাজ = C-এর 32 দিনের কাজ

C-এর 12 " " = B-এর 10 " "

B-এর 8 " " = A-এর 6 " "

$\therefore$ $x \times 12 \times 8 = 32 \times 10 \times 6$; বা $x = \frac{32 \times 10 \times 6}{12 \times 8} = 20$

A, 20 দিনে কাজটি করিবে

দ্রষ্টব্য : শৃঙ্খল নিয়মের সাহায্যে প্রশ্নের সমাধান করিবার সময় নিম্নলিখিত প্রণালী অনুসরণ করিবে।

(i) প্রশ্নের অন্তর্গত বিষয়গুলিকে এইরূপে সাজাইবে যে একই স্তম্ভে একজাতীয় রাশি যেন একাধিকবার না আসে। (ii) বামদিকের স্তম্ভের শীর্ষে এবং দক্ষিণ দিকের স্তম্ভের সর্বনিম্ন যেন সম-জাতীয় রাশি থাকে। (iii) নির্ণেয় রাশিটিকে বাম পার্শ্বের স্তম্ভে রাখিবার চেষ্টা করিবে। (iv) প্রদত্ত রাশিগুলিকে সাজাইয়া উভয়পার্শ্বের রাশিগুলির ধারাবাহিক গুণফল দুইটিকে সমানচিহ্নের উভয় পার্শ্বে রাখিয়া সমাধানের দ্বারা অজ্ঞাত রাশি নির্ণয় করিবে।

প্রশ্নমালা 3

1. 25 কিলো চাউলের মূল্য 80 টাকা হইলে, 1 কুইণ্ট্যাল 12 কিলো চাউলের মূল্য কত ?

2. যদি 110 কি. মি. যাইতে 121 টাকা খরচ হয়, তবে 40·92 টাকায় কত কি. মি. যাওয়া যাইবে ?

3. এক ব্যক্তি প্রতি টাকায় চার পয়সা আয়কর দিবার পর 4,794 টাকা পাইল। তাহার আয় কত ?

4. 25 জন লোক একটি কাজ 12 দিনে করিতে পারে। 20 জন লোক উহা কতদিনে করিবে ?

5. একটি ঘরের মেঝেতে কার্পেট বিছাইতে $27\frac{1}{2}$ মিটার দৈর্ঘ্যের 9 সে. মি. চওড়া কার্পেটের প্রয়োজন হয়। 7 সে. মি. চওড়া কার্পেট দ্বারা মেঝেটি আবৃত করিতে কত দৈর্ঘ্যের কার্পেটের প্রয়োজন হইবে ?

6. একটি দুর্গে 2,200 জন লোকের 50 দিনের খাদ্য ছিল। 17 দিন পরে ঐ দুর্গে আরও কিছু লোক উপস্থিত হওয়ায় অবশিষ্ট খাদ্যের আরও 20 দিন চলিল। দুর্গে কতজন নূতন লোক আসিয়াছিল ?

7. 2 জন পুরুষ 3 জন বালকের সমান কাজ করিতে পারে। যদি 5 জন পুরুষ ও 9 জন বালক একটি কাজ 17 দিনে করিতে পারে, তবে 9 জন পুরুষ ও 12 জন বালক কাজটি কত দিনে করিতে পারিবে ?

8. যদি 8 জন পুরুষ বা 17 জন বালক একটি কাজ 33 দিনে করিতে পারে, তবে 12 জন পুরুষ ও 24 জন বালক কতদিনে উহার 3 গুণ কাজ করিতে পারিবে? [S. F. '59]

9. 15টি চেয়ার ও দুইটি টেবিলের মূল্য 400 টাকা হইলে, 12টি চেয়ার ও 3টি টেবিলের মূল্য নির্ণয় কর। (10টি চেয়ারের মূল্য = 4টি টেবিলের মূল্য।)

10. 12 জন লোক প্রত্যহ 9 ঘণ্টা খাটিয়া একটি কাজ 30 দিনে করিতে পারে। প্রত্যহ 5 ঘণ্টা খাটিয়া কত লোক উহার 10 গুণ কাজ 24 দিনে করিতে পারিবে?

11. যদি 8 জন পুরুষ বা 15 জন স্ত্রীলোক 30 দিনে 120 টাকা আয় করে, তবে 31 জন পুরুষ এবং 24 জন স্ত্রীলোক 45 দিনে কত টাকা আয় করিবে?

12. যদি কিছুসংখ্যক লোক প্রত্যহ 11 ঘণ্টা খাটিয়া 5 দিনে 210 গজ দীর্ঘ, 3 গজ প্রশস্ত ও 2 গজ গভীর পরিখা খনন করিতে পারে, তবে প্রত্যহ 10 ঘণ্টা খাটিয়া উহারা কত দিনে 420 গজ দীর্ঘ, 12 গজ প্রশস্ত এবং 3 গজ গভীর পরিখা খনন করিতে পারিবে?

13. A যে কাজ 4 দিনে করে, B তাহা 5 দিনে করিতে পারে। B যে কাজ 6 দিনে করে, C তাহা 7 দিনে করিতে পারে। A কোন কাজ 21 দিনে করিলে, C উহা কত দিনে করিবে?

14. 6টি ঘোড়ার মূল্য 24টি গরুর মূল্যের সমান। 10টি গরুর মূল্য 8টি মহিষের মূল্যের সমান, 4টি মহিষের মূল্য 15টি গাধার মূল্যের সমান এবং 8টি গাধার মূল্য 32টি ভেড়ার মূল্যের সমান। যদি 9টি ভেড়ার মূল্য 25 টাকা হয়, তবে 1টি ঘোড়ার মূল্য কত?

15. কলিকাতার কোন ব্যক্তি 99 ফ্রাঙ্ক মূল্যের একটি ঘড়ি ক্রয় করিবেন। বিনিময়ের হার যদি 1 টাকা 25 পয়সা = 1 শিলিং 6 পেন্স এবং 1 পাউণ্ড = 13·2 ফ্রাঙ্ক হয়, তাহা হইলে তাহাকে কত টাকা দিতে হইবে? [S. F. '69]

16. যদি 1 ঘনমিটার = 35·3 ঘনফুট, 1 গ্রাম = 15·43 গ্রেন, এবং 1 ঘন ইঞ্চি বায়ুর ওজন 31 গ্রেন হয়, তবে 10 লিটার বায়ুর ওজন কত গ্রাম হইবে তাহা নির্ণয় কর।

17. 1 মাইল দৌড় প্রতিযোগিতায় A, B-কে 40 গজে এবং B, C-কে 20 গজে হারাইল। যদি প্রতিযোগিতাটিতে A এবং C অংশ গ্রহণ করে, তবে A কত গজে জয়লাভ করিবে?

18. যদি প্রতি 10 মিনিটে 3 বার গোলাবর্ষণ করিয়া 6টি কামান 60 ঘণ্টায় কোন দুর্গ ভাঙ্গিতে পারে, তবে প্রতি 5 মিনিটে 2 বার গোলাবর্ষণ করিয়া কতগুলি কামান ঐ দুর্গকে 15 ঘণ্টায় ভাঙ্গিতে পারিবে? [D. B. '41]

9. মিশ্রণ (Alligation) :

বিভিন্ন মূল্যের একজাতীয় (বা বিভিন্ন জাতীয়) দ্রব্যকে বিভিন্ন পরিমাণে মিশ্রিত করিয়া কোন নূতন দ্রব্য প্রস্তুত করাকে **মিশ্রণ** (Alligation) বলে। মিশ্রণটির

কাজ 10 দিনে করিতে পারে C তাহা 12 দিনে করে। C কোন কাজ 32 দিনে করিলে A তাহা কত দিনে করিবে ?

উঃ মনে কর, A কাজটি x দিনে করিবে।

∴ A-এর x দিনের কাজ = C-এর 32 দিনের কাজ

C-এর 12 " " = B-এর 10 " "

B-এর 8 " " = A-এর 6 " "

∴ $x \times 12 \times 8 = 32 \times 10 \times 6$; বা $x = \frac{32 \times 10 \times 6}{12 \times 8} = 20$

A, 20 দিনে কাজটি করিবে

দ্রষ্টব্য : শৃঙ্খল নিয়মের সাহায্যে প্রশ্নের সমাধান করিবার সময় নিম্নলিখিত প্রণালী অনুসরণ করিবে।

(i) প্রশ্নের অন্তর্গত বিষয়গুলিকে এইরূপে সাজাইবে যে একই স্তম্ভে একজাতীয় রাশি যেন একাধিকবার না আসে। (ii) বামদিকের স্তম্ভের শীর্ষে এবং দক্ষিণ দিকের স্তম্ভের সর্বনিম্ন যেন সম-জাতীয় রাশি থাকে। (iii) নির্ণেয় রাশিটিকে বাম পার্শ্বের স্তম্ভে রাখিবার চেষ্টা করিবে। (iv) প্রদত্ত রাশিগুলিকে সাজাইয়া উভয়পার্শ্বের রাশিগুলির ধারাবাহিক গুণফল দুইটিকে সমানচিহ্নের উভয় পার্শ্বে রাখিয়া সমাধানের দ্বারা অজ্ঞাত রাশি নির্ণয় করিবে।

প্রশ্নমালা 3

1. 25 কিলো চাউলের মূল্য 80 টাকা হইলে, 1 কুইণ্ট্যাল 12 কিলো চাউলের মূল্য কত ?

2. যদি 110 কি. মি. যাইতে 121 টাকা খরচ হয়, তবে 40.92 টাকায় কত কি. মি. যাওয়া যাইবে ?

3. এক ব্যক্তি প্রতি টাকায় চার পয়সা আয়কর দিবার পর 4,794 টাকা পাইল। তাহার আয় কত ?

4. 25 জন লোক একটি কাজ 12 দিনে করিতে পারে। 20 জন লোক উহা কতদিনে করিবে ?

5. একটি ঘরের মেঝেতে কার্পেট বিছাইতে $27\frac{1}{2}$ মিটার দৈর্ঘ্যের 9 সে. মি. চওড়া কার্পেটের প্রয়োজন হয়। 7 সে. মি. চওড়া কার্পেট দ্বারা মেঝেটি আবৃত করিতে কত দৈর্ঘ্যের কার্পেটের প্রয়োজন হইবে ?

6. একটি দুর্গে 2,200 জন লোকের 50 দিনের খাদ্য ছিল। 17 দিন পরে ঐ দুর্গে আরও কিছু লোক উপস্থিত হওয়ায় অবশিষ্ট খাদ্যের আরও 20 দিন চলিল। দুর্গে কতজন নূতন লোক আসিয়াছিল ?

7. 2 জন পুরুষ 3 জন বালকের সমান কাজ করিতে পারে। যদি 5 জন পুরুষ ও 9 জন বালক একটি কাজ 17 দিনে করিতে পারে, তবে 9 জন পুরুষ ও 12 জন বালক কাজটি কত দিনে করিতে পারিবে ?

8. যদি 8 জন পুরুষ বা 17 জন বালক একটি কাজ 33 দিনে করিতে পারে, তবে 12 জন পুরুষ ও 24 জন বালক কতদিনে উহার 3 গুণ কাজ করিতে পারিবে ? [S. F. '59]

9. 15টি চেয়ার ও দুইটি টেবিলের মূল্য 400 টাকা হইলে, 12টি চেয়ার ও 3টি টেবিলের মূল্য নির্ণয় কর। (10টি চেয়ারের মূল্য = 4টি টেবিলের মূল্য।)

10. 12 জন লোক প্রত্যহ 9 ঘণ্টা খাটিয়া একটি কাজ 30 দিনে করিতে পারে। প্রত্যহ 5 ঘণ্টা খাটিয়া কত লোক উহার 10 গুণ কাজ 24 দিনে করিতে পারিবে ?

11. যদি 8 জন পুরুষ বা 15 জন স্ত্রীলোক 30 দিনে 120 টাকা আয় করে, তবে 31 জন পুরুষ এবং 24 জন স্ত্রীলোক 45 দিনে কত টাকা আয় করিবে ?

12. যদি কিছুসংখ্যক লোক প্রত্যহ 11 ঘণ্টা খাটিয়া 5 দিনে 210 গজ দীর্ঘ, 3 গজ প্রশস্ত ও 2 গজ গভীর পরিখা খনন করিতে পারে, তবে প্রত্যহ 10 ঘণ্টা খাটিয়া উহারা কত দিনে 420 গজ দীর্ঘ, 12 গজ প্রশস্ত এবং 3 গজ গভীর পরিখা খনন করিতে পারিবে ?

13. A যে কাজ 4 দিনে করে, B তাহা 5 দিনে করিতে পারে। B যে কাজ 6 দিনে করে, C তাহা 7 দিনে করিতে পারে। A কোন কাজ 21 দিনে করিলে. C উহা কত দিনে করিবে ?

14. 6টি ঘোড়ার মূল্য 24টি গরুর মূল্যের সমান। 10টি গরুর মূল্য 8টি মহিষের মূল্যের সমান, 4টি মহিষের মূল্য 15টি গাধার মূল্যের সমান এবং 8টি গাধার মূল্য 32টি ভেড়ার মূল্যের সমান। যদি 9টি ভেড়ার মূল্য 25 টাকা হয়, তবে 1টি ঘোড়ার মূল্য কত ?

15. কলিকাতায় কোন ব্যক্তি 99 ফ্রাঙ্ক মূল্যের একটি ঘড়ি ক্রয় করিবেন। বিনিময়ের হার যদি 1 টাকা 25 পয়সা = 1 শিলিং 6 পেন্স এবং 1 পাউণ্ড = 13·2 ফ্রাঙ্ক হয়, তাহা হইলে তাহাকে কত টাকা দিতে হইবে ? [S. F. '69]

16. যদি 1 ঘনমিটার = 35·3 ঘনফুট, 1 গ্রাম = 15·43 গ্রেন, এবং 1 ঘন ইঞ্চি বায়ুর ওজন 31 গ্রেন হয়, তবে 10 লিটার বায়ুর ওজন কত গ্রাম হইবে তাহা নির্ণয় কর।

17. 1 মাইল দৌড় প্রতিযোগিতায় A, B-কে 40 গজে এবং B, C-কে 20 গজে হারাইল। যদি প্রতিযোগিতাটিতে A এবং C অংশ গ্রহণ করে, তবে A কত গজে জয়লাভ করিবে ?

18. যদি প্রতি 10 মিনিটে 3 বার গোলাবর্ষণ করিয়া 6টি কামান 60 ঘণ্টায় কোন দুর্গ ভাঙ্গিতে পারে, তবে প্রতি 5 মিনিটে 2 বার গোলাবর্ষণ করিয়া কতগুলি কামান ঐ দুর্গকে 15 ঘণ্টায় ভাঙ্গিতে পারিবে ? [D. B. '41]

9. মিশ্রণ (Alligation) :

বিভিন্ন মূল্যের একজাতীয় (বা বিভিন্ন জাতীয়) দ্রব্যকে বিভিন্ন পরিমাণে মিশ্রিত করিয়া কোন নূতন দ্রব্য প্রস্তুত করাকে **মিশ্রণ** (Alligation) বলে। মিশ্রণটির

ক্রয়মূল্যকে **পড়তা মূল্য** বলে। মিশ্রণ সম্বন্ধীয় প্রশ্নগুলির আলোচনার সময় পড়তা মূল্য অপেক্ষা বেশী মূল্যের বস্তুকে **দামী বস্তু** এবং পড়তা মূল্য অপেক্ষা কম মূল্যের বস্তুকে **সস্তা বস্তু** বলিয়া গণ্য করা হইবে। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদা. 1. একজন দোকানদার প্রতি কিলো 2 টাকা 50 পয়সা, 3 টাকা এবং 3 টাকা 25 পয়সা দরে চাউল কিনিয়া উহাদের 3 : 3 : 4 অনুপাতে মিশ্রিত করিল। হঠাৎ চাউলের দাম কমিয়া যাওয়ায় তাহার 20% ক্ষতি হইল। মিশ্রিত চাউলের বিক্রয়-মূল্য নির্ণয় কর।

উঃ মনে কর, প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় প্রকারের চাউলের পরিমাণ যথাক্রমে $3x$ কিলো, $3x$ কিলো এবং $4x$ কিলো।

∴ মোট চাউলের পরিমাণ $=(3x+3x+4x)$ কিলো $=10x$ কিলো

∴ এখন চাউলের মোট ক্রয়মূল্য

$=(3x\times 2\cdot50+3x\times 3+4x\times 3\cdot25)$ টাকা

$=29\cdot5x$ টাকা,

মনে কর, মিশ্রিত চাউলের পড়তা মূল্য $=$ P টাকা

$$P\times 10x=29\cdot5x \quad \therefore \quad P=2\cdot95$$

অর্থাৎ পড়তা মূল্য $=$ 2 টা. 95 পয়সা।

যেহেতু মিশ্রিত চাউল বিক্রয় করিয়া 20% ক্ষতি হইয়াছে, অতএব উহার বিক্রয়-মূল্য $=$ 2 টা. 95 প. $\times \frac{80}{100}=$ 2 টা. 36 প.

উদা. 2. প্রতি কিলোগ্রাম 7 টাকা 80 পয়সা দরের চায়ের সহিত প্রতি কিলোগ্রাম 4 টাকা 80 পয়সা দরের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে মিশ্রিত চায়ের প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য 6 টাকা হইবে?

উঃ মনে কর, মিশ্রণে প্রথম প্রকার চায়ের পরিমাণ x কিলোগ্রাম এবং দ্বিতীয় প্রকারের চায়ের পরিমাণ y কিলোগ্রাম।

অতএব, প্রথম প্রকার চায়ের মূল্য $(7\cdot80)x$ টাকা।

দ্বিতীয় " " " $(4\cdot80)y$ "

আবার মোট চায়ের পরিমাণ $(x+y)$ কিলোগ্রাম।

মিশ্রিত চায়ের প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য 6 টাকা।

∴ মিশ্রিত চায়ের মোট মূল্য $6(x+y)$ টাকা।

∴ $6(x+y)=(7\cdot80)x+(4\cdot80)y$.

বা. $6x-7\cdot80x=4\cdot80y-6y$

বা, $(6-7\cdot80)x=(4\cdot80-6)y$

বা, $-1\cdot80x=-1\cdot20y$

$$\therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{1\cdot20}{1\cdot80}=\frac{120}{180}=\frac{2}{3}$$

অতএব, মিশ্রণে চায়ের অনুপাত

= প্রথম প্রকারের চা : দ্বিতীয় প্রকারের চা $=2:3$.

উদা. 3. এক ব্যক্তি 3 টাকা কিলোগ্রাম দরের কিছু চায়ের সহিত 1 টাকা 50 পয়সা কিলোগ্রাম দরের আরও কিছু চা মিশ্রিত করিল। মিশ্রণে দুই প্রকার চায়ের অনুপাত কি হইলে সে মিশ্রিত চা 2 টাকা 50 পয়সা কিলোগ্রাম দরে বিক্রয় করিয়া 25% লাভ করিতে পারিবে? [S. F. '59]

উঃ মিশ্রিত চা 2 টা. 50 প. কিলোগ্রাম দরে বিক্রয় করিলে 25% লাভ হয়।

∴ মিশ্রিত চায়ের প্রতি কিলোগ্রামের ক্রয়মূল্য $=\frac{2\cdot5\times100}{125}$ টা. $=2$ টা.

∴ পড়তা মূল্য $=2$ টাকা

মনে কর, মিশ্রণে প্রথম প্রকার চায়ের পরিমাণ x কিলোগ্রাম এবং দ্বিতীয় প্রকার চায়ের পরিমাণ y কিলোগ্রাম। অতএব প্রদত্ত সর্তানুসারে

$$x\times3+y\times1\cdot50=(x+y)\times2$$

বা, $3x+1\cdot50y=2(x+y)$

বা, $3x-2x=2y-1\cdot50y$ বা, $x=\cdot50y$

∴ $\frac{x}{y}=\cdot50=\frac{1}{2}$ ∴ নির্ণেয় অনুপাত 1 : 2.

উদা. 4. তিনটি সমান মাপের গ্লাসে জল-মিশ্রিত দুধ ছিল। তন্মধ্যে প্রথম গ্লাসে দুধ ও জলের অনুপাত 3 : 1 এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় গ্লাসে দুধ ও জলের অনুপাত যথাক্রমে 5 : 3 এবং 9 : 7 ছিল। তিনটি গ্লাসের মিশ্রিত দুধ আর একটি নূতন পাত্রে ঢালিয়া দেওয়া হইল। প্রমাণ কর যে, নূতন পাত্রে দুধ ও জলের অনুপাত 31 : 17 হইবে। [D. B. '29]

উঃ প্রথম পাত্রে দুধ $\frac{3}{4}$ অংশ এবং জল $\frac{1}{4}$ অংশ; দ্বিতীয় পাত্রে দুধ $\frac{5}{8}$ অংশ এবং জল $\frac{3}{8}$ অংশ; এবং তৃতীয় পাত্রে দুধ $\frac{9}{16}$ অংশ এবং জল $\frac{7}{16}$ অংশ। যেহেতু, পাত্রগুলি সমান; অতএব দুধের মোট পরিমাণ একটি পাত্রের $(\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{9}{16})$ বা $\frac{31}{16}$ অংশ এবং জলের মোট পরিমাণ একটি পাত্রের $(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{7}{16})$ বা $\frac{17}{16}$ অংশ।

∴ নূতন পাত্রের দুধ ও জলের অনুপাত $=\frac{31}{16}:\frac{17}{16}=31:17$।

প্রশ্নমালা 4

1. কোন দোকানদার প্রতি কিলো 2 টাকা 50 পয়সা দরে 7 কিলো চায়ের সহিত প্রতি কিলো 3 টাকা 58 পয়সা দরের 5 কিলো চা মিশ্রিত করিল। প্রতি কিলো চায়ের পড়তা-মূল্য নির্ণয় কর।

2. কোন ব্যবসায়ী প্রতি কুইন্টাল চাউল 250 টাকা, 275 টাকা, এবং 300 টাকা দরে ক্রয় করিয়া উহাদের যথাক্রমে 5 : 4 : 1 অনুপাতে মিশ্রিত করিল। মিশ্রণটির পড়তা মূল্য নির্ণয় কর।

3. সোরা, গন্ধক ও কাঠকয়লা মিশ্রিত করিয়া বারুদ প্রস্তুত করা হয়। বারুদে 75 ভাগ সোরা, 10 ভাগ গন্ধক ও 15 ভাগ কাঠকয়লা থাকিলে, 25 কি.গ্রা. বারুদে ঐ সকল পদার্থের কোন্‌টি কতটুকু থাকিবে ?

4. প্রতি কিলোগ্রাম 6 টাকা 50 পয়সা দরে চায়ের সহিত 4 টাকা দরের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের পড়তা মূল্য 5 টাকা হইবে ?

5. এক ব্যক্তি 3 টাকা কিলোগ্রাম দরের কিছু রঙের সহিত 1·50 টাকা কিলোগ্রাম দরের কিছু রঙ মিশাইয়া মিশ্রিত রঙ প্রতি কিলোগ্রাম 2·50 টাকা দরে বিক্রয় করিয়া 25% লাভ করিল। সে কি অনুপাতে রঙ দুইটি মিশাইয়াছিল ?

6. 9 টাকা 60 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চায়ের সহিত 13 টাকা 44 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিয়া প্রতি কিলোগ্রাম 13 টাকা 20 পয়সা দরে বিক্রয় করিলে 10% লাভ হইবে ? [S. F. '68]

7. কোন ব্যবসায়ী প্রতি কিলো 2 টাকা এবং 3 টাকা দরের গম যথাক্রমে 9 : 5 অনুপাতে মিশ্রিত করিয়া কি দরে বিক্রয় করিলে তাহার 2% ক্ষতি হইবে ?

8. একজন মুদি প্রতি কিলো 8·75 টাকা দরের সরিষার তৈলের সহিত প্রতি কিলো 7·70 টাকা দরের সরিষার তৈল 6 : 5 অনুপাতে মিশ্রিত করিয়া মিশ্রিত তৈল প্রতি কিলো 8·5 টাকা দরে বিক্রয় করিয়া 5 টাকা লাভ করিল। প্রতি প্রকার তৈলের পরিমাণ নির্ণয় কর।

9. একটি পাত্রে 5 : 3 অনুপাতে দুধ ও জল মিশ্রিত আছে। উহাতে আরও 40 লিটার দুধ ঢালাতে দুধ ও জলের অনুপাত 5 : 1 হইল। পাত্রটিতে জলের পরিমাণ কত ?

10. একটি পাত্রে 3 : 1 অনুপাতে দুধ ও জল মিশান আছে। ঐ জল-মিশ্রিত দুধের কত অংশ তুলিয়া লইয়া উহার পরিবর্তে জল ঢালিলে, দুধ ও জলের অনুপাত 1 : 1 হইবে ?

11. দুইটি পাত্রে জল-মিশ্রিত দুধ আছে। উহাদের একটিতে জল ও দুধের অনুপাত 2 : 7 এবং অন্যটিতে 2 : 9 ; পাত্র দুইটি হইতে মিশ্রিত পদার্থ কি অনুপাতে লইয়া মিশাইলে, উৎপন্ন মিশ্রণটিতে জল ও দুধের অনুপাত 1 : 4 হইবে ? [C.U. '44]

12. তিনটি সমান মাপের বিকার জল-মিশ্রিত অম্লদ্বারা পূর্ণ আছে। বিকার তিনটিতে অম্ল ও জলের অনুপাত যথাক্রমে 2 : 3, 3 : 4 এবং 4 : 5 ; মিশ্রণ তিনটিকে একটি পাত্রে ঢালিলে নূতন পাত্রের অম্ল ও জলের অনুপাত কত হইবে ?

13. প্রতি গ্রাম স্বর্ণের মূল্য 12 টাকা। স্বর্ণ ও রৌপ্যের ধাতু সংকর দ্বারা নির্মিত 4 কে.জি. ওজনের একটি পিণ্ডের মূল্য 36,210 টাকা। যদি উক্ত পিণ্ডটির স্বর্ণ ও রৌপ্যের ওজনগুলি পরস্পর পরিবর্তিত হয়, তবে উহার মূল্য 12,630 টাকা হইবে। পিণ্ডটিতে স্বর্ণ ও রৌপ্যের অনুপাত এবং প্রতি কে. জি. রৌপ্যের মূল্য নির্ণয় কর।

14. 48 গ্যালন তৈল-মিশ্রিত রং-এ $12\frac{1}{2}\%$ তৈল আছে। উহাকে লেই-তে পরিণত করিতে আরও কি পরিমাণ তৈল মিশ্রিত করিতে হইবে যাহাতে লেই-তে

রং ও তৈল-এর অনুপাত 2 : 1 হয় ? যদি উহাতে 14 গ্যালন তৈল মিশ্রিত করা হয়, তবে নূতন মিশ্রণে রং ও তৈল-এর অনুপাত নির্ণয় কর। [C. U. '59]

15. A ও B—দুই প্রকার তৈল 3 : 2 অনুপাতে মিশ্রিত করা হইল। এই মিশ্রণের 25% বিক্রয় হইবার পর অবশিষ্টাংশে A-প্রকার তৈল এরূপ পরিমাণে মিশ্রিত করা হইল যাহাতে অনুপাত 5 : 3 হয়। যদি নূতন মিশ্রণের পরিমাণ 600 গ্যালন হয়, তবে প্রাথমিক মিশ্রণের পরিমাণ এবং পরে মিশ্রিত A প্রকার তৈলের পরিমাণ নির্ণয় কর। [P. U. '46]

দ্বিতীয় অধ্যায়

শতকরা হিসাব (Percentage)

10. 'শতকরা' বলিতে প্রতি শ'তে অর্থাৎ প্রতি 100-তে বুঝায়। একশতের উপর যে হিসাব করা হয় তাহাকে শতকরা হিসাব (Percentage) বলে। 'শতকরা' কথাটি বুঝাইতে '%'-চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। 7% বলিতে আমরা 100 ভাগের 7 ভাগকে বুঝিয়া থাকি। অর্থাৎ $7\% = \frac{7}{100}$; ইহা একটি ভগ্নাংশ। আবার, $\frac{15}{100}$, $\frac{38}{100}$, $\frac{51}{100}$ ভগ্নাংশগুলির পরিবর্তে যথাক্রমে, 15%, 38%, 51% লেখা যায়। অতএব শতকরাকে এরূপ একটি ভগ্নাংশ বলিয়া গণ্য করা যাইতে পারে যাহার হর 100 ; এবং যাহার লব দ্বারা প্রতি শতের হারকে বুঝায়।

কোন শতকরা হরকে 100 দ্বারা ভাগ করিলে উহা তুল্যমান ভগ্নাংশে পরিণত হইবে। আবার কোন অনুপাত বা ভগ্নাংশকে 100 দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলটিকে '%'-চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করিলে উহার তুল্যমান শতকরা হার পাওয়া যাইবে। যেমন,

$2 : 5 = \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times 100\% = 40\%$; $\frac{3}{8} = \frac{3}{8} \times 100\% = 37\frac{1}{2}\%$ ইত্যাদি।

উদা. 1. $\frac{4}{5}$-কে শতকরা হারে প্রকাশ কর।

উঃ $\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times 100\% = 80\%$

উদা. 2. 300 টাকা কত টাকার 5% ?

উঃ মনে কর, নির্ণেয় টাকার পরিমাণ $= x$

$\therefore$ x-এর 5% = 300 টাকা, বা, x-এর $\frac{5}{100} = 300$ টাকা

বা, $\frac{x}{20} = 300$ টাকা, $\therefore$ $x = 6000$ টাকা।

উদা. 3. কোন নির্বাচনে একজন প্রার্থী তাহার প্রতিদ্বন্দ্বী অপেক্ষা $6\frac{1}{4}\%$ ভোট কম পাইলেন। যদি প্রতিদ্বন্দ্বী 21,600টি ভোট পাইয়া থাকেন, তবে পরাজিত প্রার্থী কত ভোট পাইয়াছিলেন ?

উঃ এখানে পরাজিত প্রার্থী প্রতিদ্বন্দ্বীর প্রাপ্ত ভোটের $6\frac{1}{4}\% = 21,600$-এর

$6\frac{1}{4}\% = 21,600 \times \frac{25}{400} = 1350$

$\therefore$ পরাজিত প্রার্থী তাঁহার প্রতিদ্বন্দ্বী অপেক্ষা 1350টি ভোট কম পাইয়াছেন। অর্থাৎ পরাজিত প্রার্থীর প্রাপ্ত ভোটের সংখ্যা $= (21,600 - 1350)$টি $= 20,250$টি।

উদা. 4. কোন পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 45% ইংরাজীতে, 25% অঙ্কে এবং 18% ইংরাজী ও অঙ্ক উভয় বিষয়ে ফেল করে। যদি 14,400 জন পরীক্ষার্থী পাশ করিয়া থাকে, তবে কতজন পরীক্ষা দিয়াছিল ?

উঃ প্রশ্নানুসারে, 18% পরীক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করিয়াছে।
∴ কেবলমাত্র ইংরাজিতে ফেল করে (45 − 18)% বা 27% ছাত্র।
এবং " অঙ্কে " " (25 − 18)% বা 7% " ।
∴ মোট ফেল করে (27 + 7 + 18)% বা 52% ছাত্র।
∴ পরীক্ষার্থীদের (100 − 52)% বা 48% ছাত্র উভয় বিষয়ে পাশ করিয়াছে।
মনে কর, পরীক্ষার্থী-সংখ্যা $= x$; ∴ x-এর 48% = 14,400 জন।
বা, $x \times \frac{48}{100} = 14{,}400$ জন ; ∴ $x = 30{,}000$ জন।
∴ 30,000 জন পরীক্ষার্থী পরীক্ষা দিয়াছিল।

উদা. 5. কয়লার মূল্য 75% বৃদ্ধি পাওয়ায় কয়লার খরচ না বাড়াইয়া কোন গৃহস্থকে কয়লার ব্যবহার শতকরা কত কমাইতে হইবে ?

উঃ শর্তানুসারে,
কয়লার পূর্বমূল্য 100 টাকা হইলে, উহার বর্তমান মূল্য 175 টাকা।
∴ 175 ভাগের মধ্যে গৃহস্থের ব্যবহার কমাইতে হইবে 75 ভাগ।
∴ 1 " " " " " " $\frac{75}{175}$ " ।
∴ 100 " " " " " " $\frac{75 \times 100}{175}$
বা, $42\frac{6}{7}$ ভাগ।
∴ গৃহস্থকে কয়লার ব্যবহার $42\frac{6}{7}$% কমাইতে হইবে।

উদা. 6. পাটের দাম 10% কমিয়া যাওয়ায় 100 টাকায় 2 কুইণ্টাল পাট বেশি পাওয়া গেল। প্রতি কুইণ্টাল পাটের পূর্ব মূল্য কত ছিল ?

উঃ মনে কর, প্রতি কুইণ্টাল পাটের পূর্বমূল্য $= x$ টাকা।
বর্তমানে প্রতি কুইণ্টাল পাটের মূল্য হ্রাস $= x$ টাকার $10\% = \frac{x}{10}$ টা.।
∴ বর্তমানে প্রতি কুইণ্টাল পাটের মূল্য $= (x - \frac{x}{10})$ টা. $= \frac{9x}{10}$ টা.
∴ বর্তমানে 900 টাকায় পাট পাওয়া যায় $\left(900 \div \frac{9x}{10}\right)$ বা, $\frac{1000}{x}$ কুইণ্টাল।
আবার পূর্বে 900 টাকায় পাট পাওয়া যাইত $(900 \div x)$ বা, $\frac{900}{x}$ কুইণ্টাল।
শর্তানুসারে, $\frac{1000}{x} - \frac{900}{x} = 2$
বা, $\frac{100}{x} = 2$ ∴ $x = 50$
∴ প্রতি কুইণ্টাল পাটের পূর্ব মূল্য = 50 টাকা।

উদা. 7. বাস ভাড়া 25% বাড়িয়া যাওয়ার ফলে যাত্রী দলের যাতায়াত 25% কমিয়া গেল। ইহাতে বাসের আয় শতকরা কত অংশ বৃদ্ধি বা হ্রাস পাইবে ?

উঃ মনে কর, পূর্বে 100 জন যাত্রীর নিকট হইতে 100 টাকা আয় হইত।
যেহেতু যাত্রীর সংখ্যা 25% কমিয়াছে, অতএব বর্তমানে যাত্রীর সংখ্যা = 75 জন।
আবার বর্তমানে বাস ভাড়া 25% বৃদ্ধি পাইয়াছে।

∴ বর্তমানে 100 জন যাত্রীর নিকট হইতে আয় = 125 টাকা,

∴ „ 1 „ „ „ „ „ $=\frac{125}{100}$ „

∴ „ 75 „ „ „ „ „ $=\frac{125\times75}{100}$ টাকা,

$=93\frac{3}{4}$ টাকা,

∴ বাসের আয় হ্রাস $=(100-93\frac{3}{4})\%=6\frac{1}{4}\%$.

উদা. 8. কোন পরিবারের খাদ্যে, পড়াশুনায় ও অন্যান্য খাতে খরচের অনুপাত 10 : 3 : 7 ; পরিবারটি খাদ্য ও পড়াশুনায় খরচ যথাক্রমে 25% এবং 10% বৃদ্ধি পাওয়ায় অন্যান্য খাতের খরচ $7\frac{1}{7}\%$ কমান হইল। ইহাতে পরিবারের খরচ শতকরা কত বৃদ্ধি পাইবে ?

উঃ মনে কর, পরিবারটির খাদ্যের খরচ = $10x$ টাকা, পড়াশুনার খরচ = $3x$ টাকা এবং অন্যান্য খাতে খরচ = $7x$ টাকা।

∴ পরিবারের মোট খরচ $=(10x+3x+7x)$ টাকা $=20x$ টাকা।

খাদ্যের জন্যে খরচ বৃদ্ধি পায় $=(10x$-এর $25\%)$ টাকা $=(10x$-এর $\frac{1}{4})$ টাকা

$=\frac{5x}{2}$ টাকা।

পড়াশুনার জন্যে খরচ বৃদ্ধি পায় $=((3x$-এর $10\%)$ টা. $=\frac{3x}{10}$ টাকা,

অন্যান্য খাতে খরচ হ্রাস পায় $=(7x$-এর $7\frac{1}{7}\%)$ টা. $=(7x$-এর $\frac{1}{14})$ টাকা,

$=\frac{x}{2}$ টাকা,

∴ খরচের মোট বৃদ্ধি $=(\frac{5x}{2}+\frac{3x}{10}-\frac{x}{2})$ টা. $=(\frac{25x+3x-5x}{10})$ টাকা,

$=\frac{23x}{10}$ টাকা,

∴ $20x$ টাকায় খরচ বাড়ে $=\frac{23x}{10}$ টাকা,

∴ 1 „ „ „ $=\frac{23x}{10\times20x}$ টাকা,

∴ 100 „ „ „ $=\frac{23\times100}{10\times20}$ টাকা $=11\frac{1}{2}$ টাকা।

∴ পরিবারের খরচ $11\frac{1}{2}\%$ বৃদ্ধি পাইবে।

প্রশ্নমালা 5

1. নিম্নের ভগ্নাংশগুলিকে শতকরা হারে প্রকাশ কর :
   (a) $\frac{2}{5}$; (b) $\frac{1}{8}$; (c) $\frac{1}{3}$.
2. নিম্নলিখিত শতকরাগুলিকে ভগ্নাংশে রূপান্তরিত কর :
   (a) 5% ; (b) $6\frac{1}{4}\%$; (c) $7\frac{1}{2}\%$; (d) $8\frac{1}{3}\%$

3. 5 টাকা 60 পয়সার $33\frac{1}{3}\%$=কত?

4. 2 কুইণ্টাল 19 কিলোগ্রামের $12\frac{1}{2}\%$=কত?

5. 800 টাকা কত টাকার $6\frac{1}{4}\%$?

6. এক ব্যক্তির বেতন $12\frac{1}{2}\%$ বৃদ্ধি পাইয়া 1080 টাকা হইল। তাহার পূর্বের বেতন কত ছিল?

7. কোন বিদ্যালয়ের ছাত্রসংখ্যা $7\frac{1}{2}\%$ হ্রাস হওয়ায় ছাত্রসংখ্যা 555 হইল। পূর্বের ছাত্রসংখ্যা কত ছিল?

8. এক গ্রামে 3724 জন লোক বাস করে। উহাদের শতকরা 75 জন শিক্ষিত। যদি ঐ গ্রামে আরও 133 জন শিক্ষিত লোক আসে তবে গ্রামটিতে শিক্ষিত লোকের শতকরা হার নির্ণয় কর।

9. কোন গ্রামের অধিবাসীদের 10% কলেরায় মরিয়া যাওয়ার ভয়ে অবশিষ্টের 20% গ্রাম ছাড়িয়া চলিয়া গেল। ইহাতে গ্রামটির লোকসংখ্যা কমিয়া 504 জন হইল। গ্রামটিতে পূর্বে কত লোক বাস করিত?

10. এক ব্যক্তি কিছু অর্থ তাহার তিন পুত্রের মধ্যে এইরূপে ভাগ করিয়া দিলেন যে প্রথম পুত্র 25%, দ্বিতীয় পুত্র অবশিষ্টের 40% এবং তৃতীয় পুত্র 4500 টাকা পাইল। ঐ ব্যক্তির সম্পূর্ণ অর্থের পরিমাণ এবং প্রথম ও দ্বিতীয় পুত্রের অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

11. কোন শহরে 20,000 লোক আছে। যদি পুরুষের সংখ্যা 10% বৃদ্ধি পায় এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা 6% হ্রাস পায়, তবে লোকসংখ্যা অপরিবর্তিত থাকে। পুরুষ ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা নির্ণয় কর।

12. কাপড়ের মূল্য 65% বাড়িয়া যাওয়ায় কাপড় বাবদ খরচ শতকরা কত কমাইলে কাপড়ের খরচ পূর্ববৎ থাকিবে?

13. চায়ের মূল্য 20% কমিয়া যাওয়ায় বর্তমানে 10 টাকায় পুর্বাপেক্ষা 500 গ্রাম চা বেশী পাওয়া যায়। চায়ের বর্তমান ও পূর্বদর নির্ণয় কর।

14. পোষ্টকার্ডের মূল্য 50% বৃদ্ধি পাওয়ায় ইহার বিক্রয় 20% হ্রাস পাইল। ইহাতে সরকারের আয় শতকরা কত বৃদ্ধি পাইল?

15. চিনির মূল্য 25% বৃদ্ধি পাওয়ায় কোন গৃহস্থ চিনির ব্যবহার 30% কম করিল। ইহার ফলে ঐ গৃহস্থের চিনির দরুন খরচ শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাইবে তাহা নির্ণয় কর।

16. একটি বিদ্যালয়ের ছাত্র-ছাত্রী সংখ্যার 75% ছাত্র এবং অবশিষ্ট ছাত্রী। 50 জন ছাত্র বিদ্যালয় হইতে চলিয়া গেল এবং 50 জন নূতন ছাত্রী ভর্তি হইল। ছাত্রী সংখ্যা ইহাতে বর্তমান ছাত্র-ছাত্রী সংখ্যার $33\frac{1}{3}\%$ হইল। বিদ্যালয়ের ছাত্র-ছাত্রীর সংখ্যা কত?

17. একটি রেডিও এবং একটি ড্রেসিং টেবিলের একত্রে মূল্য 600 টাকা। যদি রেডিওর মূল্য 10% বেশি এবং ড্রেসিং টেবিলের মূল্য 10% কম হইত তবে উহাদের একত্রে মূল্য 590 টাকা হইত। ড্রেসিং টেবিলটির দাম কত?

18. সরকার জুয়েলার্স গহণার ধার্যমূল্যের উপর 15% কমিশন দিয়া যে দাম হয় তাহার উপর $3\frac{1}{2}$% বিক্রয় কর লইয়া গহণা বিক্রয় করে। ঐ দোকানের একটি লকেটের ধার্য মূল্য 960 টাকা হইলে ক্রেতাকে কত দিতে হইবে?

19. জুতার মূল্য বর্তমানে 55 শতাংশ বৃদ্ধি পাইয়াছে। ক্রেতাকে ধার্য মূল্যের উপর 6% বিক্রয় কর দিতে হয়। যে জুতার ধার্য মূল্য পূর্বে 45·00 টাকা ছিল তাহার বর্তমান বিক্রয়মূল্য কত?

20. তামা ও দস্তার মিশ্রধাতুতে 40% তামা এবং 60% দস্তা আছে। এইরূপ 320 কেজি মিশ্রধাতুতে আর কি পরিমাণ তামা মিশাইলে মিশ্রণটিতে তামার পরিমাণ 60% হইবে?

21. এক ব্যক্তির মাসিক আয় 625 টাকা। মোট বার্ষিক আয়ের প্রথম 3,000 টাকার উপর কোন আয়কর দিতে হয় না। পরবর্তী 2,000 টাকার উপর আয়করের হার টাকায় 7 পয়সা এবং তদূর্ধ্বে প্রতি টাকায় 9 পয়সা আয়কর দিতে হইলে তাহাকে মোট আয়ের শতকরা কতভাগ আয়কর দিতে হইবে?

22. কোন পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীর সংখ্যা 2500 জন। ইহাদের এক-চতুর্থাংশ বালিকা এবং অবশিষ্ট বালক। যদি বালিকাদের 40% এবং বালকদের 36% অকৃতকার্য হইয়া থাকে তবে সমস্ত পরীক্ষার্থীর শতকরা কতভাগ পাশ করিয়াছিল?

23. কোন পরীক্ষায় 52% পরীক্ষার্থী ইংরাজীতে এবং 42% পরীক্ষার্থী অঙ্কে ফেল করিল। যদি ইংরাজী ও অঙ্ক উভয় বিষয়েই 17% পরীক্ষার্থী ফেল করিয়া থাকে তবে শতকরা কতজন উভয় বিষয়ে পাশ করিয়াছিল?

24. কোন পরীক্ষায় পরীক্ষার্থী 80% ইংরাজীতে এবং 85% বাংলায় পাশ করিল। যদি উভয় বিষয়ে মোট 73% পাশ করিয়া থাকে তবে উভয় বিষয়ে শতকরা কতজন ফেল করিয়াছিল?

25. একজন দোকানদারের ধার্যমূল্য ক্রয়মূল্য অপেক্ষা 30% বেশি। যদি সে ক্রেতাকে 10% কমিশন দিয়া মাল বিক্রয় করে তবে তাহার শতকরা কত লাভ হইবে?

26. তালিকা মূল্যের উপর 25% কমিশন দিয়া তারা সাইকেল কোম্পানী 26% লাভে বাংলাদেশে সাইকেল রপ্তানী করিল। প্রতিটি সাইকেলে তাহাদের 30 টাকা করিয়া লাভ হইলে সাইকেলের তালিকা মূল্য কত ছিল?

27. একটি কোম্পানী তাহার মোট আয়ের 50% কার্য নির্বাহের জন্যে ব্যয় করে। অবশিষ্টের 50% রিজার্ভ ফাণ্ডে রাখিয়া বাকী অংশ অংশীদারগণকে তাহাদের মোট 10,00000 টাকার শেয়ারে 5% হারে লভ্যাংশ বাবদ দেয়। কোম্পানীর মোট আয় নির্ণয় কর।

28. এক ব্যক্তি তাঁহার আয়ের 10% জীবন বীমায় ব্যয় করিয়া অবশিষ্টাংশের $6\frac{1}{4}$% আয়কর দিয়া দেখিলেন যে তাঁহার নিকট মোট আয়ের 80% অপেক্ষা 437·50 টাকা বেশী আছে। ঐ ব্যক্তির মোট আয় কত?

29. কোন প্রতিষ্ঠানের একজন বিক্রেতা পারিশ্রমিক বাবদ নির্দিষ্ট মাসিক মাহিনা ছাড়াও তাঁহার দ্বারা বিক্রয়লব্ধ মোট অর্থের নির্দিষ্ট শতাংশ পায়। 1973 সালের প্রথম 4 মাসে সে 26,272 টাকার জিনিষ বিক্রয় করাতে 5,284 টাকা আয় করে। বৎসরে বাকী সময়ে সে 43,008 টাকার জিনিষ বিক্রয় করায় 9,376 টাকা পায়। তাহার নির্দিষ্ট মাসিক মাহিনা ও নির্দিষ্ট শতাংশটি নির্ণয় কর।

30. জানুয়ারী মাসে চাউলের দাম প্রতিকিলো 2·50 টাকা হওয়ায় কোন শিক্ষক মহাশয়ের পরিবারের অন্যান্য খরচ সহ মাসিক খরচ 350 টাকা হইল। মার্চ মাসে চাউলের মূল্য 20% এবং অন্যান্য খরচ $12\frac{1}{2}$% বৃদ্ধি পাওয়ায় তাঁহার মাসিক খরচ 405 টাকা লাগিল। ঐ পরিবারের মাসে কত কিলোগ্রাম চাউল লাগে?

31. কোন পরিবারের চাউল, তরকারি ও মাংসের খরচের অনুপাত 7 : 5 : 3 ; উহাদের খরচ যথাক্রমে 15%, $6\frac{1}{4}$% এবং 5% বৃদ্ধি পাইলে ঐ পরিবারের খরচ শতকরা কত বৃদ্ধি পাইবে?

32. সুশীলবাবু তাঁহার মাসিক আয়ের 40% খাদ্যে, 30% পরিচ্ছদে এবং 30% বিবিধ খাতে ব্যয় করে। বর্তমানে খাদ্যমূল্য $12\frac{1}{2}$% বাড়িয়া যাওয়ায় তিনি পরিচ্ছদের ব্যয় 10% কমাইয়া দিলেন। কোন প্রকার দেনা না করিয়া সংসার চালাইতে হইলে তাহার বিবধ খাতের ব্যয় শতকরা কত কমাইতে হইবে?

33. একজন ব্যবসায়ী কিছু মূলধন লইয়া ব্যবসায় আরম্ভ করিল। সে প্রথম বৎসরে 100% লাভ করিরা পরবর্তী তিন বৎসরের প্রতি বৎসরেই তাহার প্রারম্ভিক মূলধনের 20% ক্ষতি করিল। চতুর্থ বৎসরান্তে তাহার 10,240 টাকা থাকিলে, তাহার মূলধন কত ছিল?

34. এক ব্যক্তির মূলধন প্রতি বৎসর 20% করিয়া বৃদ্ধি পায়। 3 বৎসর শেষে তাহার মূলধন 3456 টাকা হইল। প্রথমে মূলধন কত ছিল?

পরিশিষ্ট

উত্তরমালা

বীজগণিত

প্রশ্নমালা 1

1. $ax+by-cz+2bx+ay+bz+cx$ 2. $4x-z$ 3. $\frac{2}{3}x-\frac{8}{9}y$

4. $\dfrac{3y-5x}{a}+\dfrac{x+2y+2z}{b}+\dfrac{x+3y}{c}$ 5. $\dfrac{3x}{10}+\dfrac{99y}{40}-\dfrac{2z}{3}+\dfrac{3}{5}$

6. $3x^4-17x^3-2x^2-8x+9$ 7. $11a^3x+21ax^2-ax-13x+20$

8. $\dfrac{-7x}{60}-\dfrac{13y}{40}+\dfrac{19z}{84}$ 9. $2\frac{47}{60}a+1\frac{7}{20}b+\frac{23}{60}c$; $11\frac{3}{5}$.

প্রশ্নমালা 2

1. $6x^2+10x-13xy-15y+6y^2$ 2. $a^4+a^2b^2+b^4$

3. $a^2+a+ab+\dfrac{b}{2}+\dfrac{b^2}{4}$ 4. $\frac{2}{9}x^5-\frac{1}{9}x^4-\frac{1}{9}x^3-1\frac{1}{9}x^2-2$

5. b^3-c^3 6. $3c^2+cx-3x^2$ 7. a^4-a^2+a

8. $a^2+4b^2+c^2-2ab+2bc+ca$

9. $x^4-px^3+\dfrac{2p^2}{3}x^2-\dfrac{p^3}{3}x+\dfrac{p^4}{9}$. 10. -14

11. -18 12. $\dfrac{5}{m}$

প্রশ্নমালা 3

1. $x^2+4xy+4y^2$ 2. $4x^2-4xy+y^2$ 3. $c^4+2+\dfrac{1}{c^4}$

4. 41209 5. $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

6. $4x^2+9y^2+12xy+4x+6y+1$ 7. $x^4+\dfrac{1}{x^4}-8x^2+\dfrac{8}{x^2}+14$

8. $x^4-2x^3-2x^3y+x^2+x^2y^2+2xy^2+2xy+y^2$

9. $a^2-2ax+x^2$ 10. 1·44 11. $\dfrac{16}{x^2}$ 12. $4c^2$

13. (i) $(a-x)^2+(x-2b)^2$ (ii) $(a-3b)^2+(c-3b)^2$
(ii) $(2x-2y)^2+(2z)^2$ (iv) $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$

14. (i) $(1)^2-(0\cdot05)^2$ (ii) $(3x-4y+7z)^2-(2x-3y+5z)^2$
(iii) $\left(\frac{6x^2+11x+5}{2}\right)^2-\left(\frac{6x^2+3x-1}{2}\right)^2$
(iv) $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2$ (v) $\left(\frac{a-2}{2}\right)^2-\left(\frac{a-4}{2}\right)^2$

15. 0 17. 29 18. 20 19. 13

20. (i) 194 (ii) 37634 21. (i) 146 (ii) 21314

23. 25 [প্রশ্নে $(a+b+c)^3$-এর স্থানে $(a+b+c)^2$ হইবে]

24. 69 25. 6 26. 54 27. m^2+n^2

প্রশ্নমালা 4

1. $9a^2-25b^2$ 2. $81a^2-25$ 3. x^6-4x^2+4x-1

4. $a^8+2a^6+3a^4+2a^2+1$ 5. 1. 6. $\frac{x+y}{x-y}$

7. $\frac{2+2x^4}{1-x^4}$ 8. $(x+2)^2-(1)^2$ 9. $(x-8)^2-(10)^2$

10. $(2a^2+9y^2)^2-(6ay)^2$ 11. $(3a^2+4b^2)^2-(5ab)^2$

12. $(a-c)^2-(b-c)^2$ 13. $(a+3b)^2-(2b+c)^2$

14. $\frac{2a}{1-a^2}$ 16. 16 17. 0

প্রশ্নমালা 5

1. $a^3b^3+3a^2b^3c+3ab^3c^2+b^3c^3$
2. $64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$
3 $-(125x^3+150x^2y+60xy^2+8y^3)$
4 $8x^3+12x^2y+12x^2z+6xz^2+12xyz+6xy^2+y^3+z^3$
$+3y^2z+3yz^2$
5. $27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3+27a^2c+3b^2c-18abc+9ac^2$
$-3bc^2+c^3$
6. $x^3y^3-3x^2y^2-3x^2y^3+3xy^3+6xy^2+3xy-y^3-3y^2-3y-1$
7. $x^3-6x^2+15x-20+\frac{15}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}$
8. $27x^3$ 9. $-(3a+1)^3$ 10. $27a^3$

11. $\frac{8}{x^3}$ [প্রশ্নে $\left(\frac{1-x^4}{x^3}\right)^2$ – এর পরিবর্তে $\left(\frac{1-x^4}{x^3}\right)$ হইবে।]

12. $2x^3+6xy^2+6xz^2+12xyz$

13. $-(2b^3c^3+6a^2b^3c+6a^2bc^3+12a^2b^2c^2)$

14. 0 15. $a+b$ 16. 464 21. 2375

22. 0 23. 7 24. 104

প্রশ্নমালা 6

1. $x(5x+3y+9)$ 2. $(3x-2y)(3x^2+1)$

3. $(a+1)(a^2+1)$ 4. $(3x+a)(2x+b)$ 5. $(px-1)(x-p)$

6. $(x+yz)(y+zx)$ 7. $c(3a-b)$ 8. $(x+y+z)(xy+yz+zx)$

9. $(b+1)(a-c)$ 10. $(3a+5b)(3a+5b)$

11. $2.2(4x-3y)(4x-3y)$

12. $7.a.a(3b-4)(3b-4)$ [প্রশ্নে 68 – এর পরিবর্তে 63 হইবে]

13. $(a-2b-c)(a-2b-c)$ 14. $(6+x-3y)(6+x-3y)$

15. $(x^2+x-3)(x^2+x-3)$ 16. $(p+q)(p+q-1)$

17. $(a-b)(c^2-ab)$ 18. $(a+b+1)(a+b+1)$

19. $(2a-b+c)(2a-b+c)$ 20. $(x+2y-9)(x+2y-9)$

21. $(x-2y-3z)(x-2y-3z)$ 22. $-(b^2-a^2-c^2)(b^2-a^2-c^2)$

23. $(a^2+a-1)(a^2+a-1)$ 24. $(x-y+4z)(x-y+4z)$

প্রশ্নমালা 7

1. $(2a+3)(2a-3)$ 2. $(8x^2+1)(8x^2-1)$

3. $3.a.a.b(a+3b)(a-3b)$ 4. $(x+a+b)(x+a-b)$

5. $(a^2+a+1)(a^2+a-1)$

6. $(2x^2+6xy+9y^2)(2x^2-6xy+9y^2)$

7. $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)(a^2+2b^2)(a^2-2b^2)$

8. $(25x^4+18y^2+30x^2y)(25x^4+18y^2-30x^2y)$

9. $(2a+b+c)(b-c)$ 10. $(x+1)(x-1)(y+1)(y-1)$

11. $(x+2y+2)(x-2y+2)$ 12. $(x+y-4)(x-y)$

13. $(a+b)(a+b)(a+b)(a-b)$ 14. $(x+2y)(x-2y+z)$

15. $(2x+z)(2x-2y-z)$ 16. $(4a-5b)(4a+5b-2c)$

17. $(x^2+6)(x^2-2)$ 18. $(x^2+5x+1)(x^2-5x+1)$

19. $(2a^2+2a+9)(2a^2-2a+9)$

20. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$

21. $(5x+7)(x-7)$ 22. $2(a-b+2c)(a-b-2c)$
23. $(a+b-c-d)(a-b+c-d)$ 24. $-5.3(7x+2)(x+16)$
25. $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)$
26. $(x+y+z-k)(x-y+z+k)(x+y-z+k)(y+z+k-x)$
27. $(ax+by-ay+bx)(ax+by+ay-bx)$
28. $(a-b-c)(a-5b+c)$ 29. $(x+y+4)(4-3x-y)$
30. $(x+1)(x+9)$ 31. $(x-1)(x+5)(x+2)$
32. $(3x+y+z)(x-y-z)$
33. $(x+a+b)(x-a+b)(x+a-b)(x-a-b)$
34. $(a-b)(a+3b-2c)$ 35. $(5a+3x-9)(5a-3x+5)$
36. $(x+y-3z)(x-y-5z)$
37. $(3x+5y+2a+3)(3x+5y-2a-3)$
38. $(x^2-5x+11)(x^2-5x+5)$
40. $(x^2-3x-17)(x^2-3x-5)$ 39. $(x^2+5x+3)(x^2+5x+7)$
41. $(x^2+7xa+8a^2)(x+5a)(x+2a)$
42. $2.2.2(x+2)(x+4)(2x^2+12x+15)$

প্রশ্নমালা 8

1. $(x+3)(x+3)(x+3)$ 2. $(a-4)(a-4)(a-4)$
3. $(p+q)(2p-q)(p-2q)$ 4. $(3a+b)(9a^2-3ab+b^2)$
5. $(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$ 6. $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
7. $-(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$ 8. $(3a^3+x^4)(9a^6-3a^3x^4+x^8)$
9. $(x+3y)(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$
10. $ab.ab(5a-3b)(25a^2+15ab+9b^2)$
11. $(2x^2+1)(2x^2-1)(4x^4+2x^2+1)(4x^4-2x^2+1)$
12. $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
13. $-2(2x+3y)(31x^2+48xy+21y^2)$
14. $(x+y)(x+y)(x^4+6x^2y^2-2x^3y-2xy^3+y^4)$
15. $(x+2y)(x-2y)(x-2y)$ 16. $(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$
17. $2(7a-2b)(61a^2-112ab+151b^2)$
18. $(x+y)(x+z)(x^2-xz+z^2)$
19. $(a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2)$
20. $(a-b)(2a^2+ab+b^2)$ 21. $(a-7)(a^2-2a+13)$
22. $mn(m-n)$ 23. $(x-2a)(x^2+2ax+4a^2)(2a+3b)(2a-3b)$

প্রশ্নমালা 9

1. $(x+6)(x+7)$
2. $(x+2)(x-3)$
3. $(ab-2c)(ab-10c)$
4. $(p-4q)(p-11q)$
5. $xy(xy-4)(xy-5)$
6. $(x-24)(x-25)$
7. $(x+9)(x-64)$
8. $(x+3)(x-3)(x^2+20)$
9. $(x+3)(x-3)(x+4)(x-4)$
10. $(x^2+2a^2)(x+4a)(x-4a)$
11. $(x+2)(x+1)(x-4)(x-3)$
12. $(x+2)(x-2)(x-4)(x-8)$
13. $(x-1)(x+5)(x+2)$
14. $(x+1)(x-1)(x-3)$
15. $(x+1)(x-5)(x-2)(x-2)$
16. $(x^2+2x-4)(x^2+2x-7)$
17. $(x^2+8x+10)(x+2)(x+6)$
18. $(5x+6)(5x+6)(25x^2+60x+26)$
19. $(49x^4+77x^2y+25y^2)(49x^4+77x^2y+29y^2)$
20. $(x-a)(ax-1)$
21. $(a+b-2)(a+b-3)$
22. $(5a-3b)(15b-13a)$
23. $(x-a)(ax+1)$
24. $(x+a)(x-a-1)$
25. $(x+a+3)(x-a-2)$
26. $(x+2a-1)(x-a+1)$
27. $(x+a+2)(x-a+1)$
28. $(x+a-b)(x-a-b)$
29. $(x+3a-b)(x-2a+b)$
30. $(x+3a+2)(x+a-1)$
31. $(a-b)(a+4b-2c)$
32. $\{x+(a+1)(b+1)\}\{x+(a-1)(b-1)\}$

প্রশ্নমালা 10

1. $(x+1)(3x-8)$
2. $(2x-3)(3x+5)$
3. $(3x+2)(4x-3)$
4. $(x-3)(5x-14)$
5. $(2x+5y)(3x-4y)$
6. $(3x-7y)(7x+4y)$
7. $(4x+7)(3x-2)$
8. $(x-3)(7x-4)$
9. $(11a-9b)(9a-11b)$
10. $(3x+1)(2x-3)$
11. $(x+1)(3x-5)(3x^2-2x+5)$
12. $(x+3)(4-x)$
13. $(x+5)(1-x)$
14. $(4x+3)(3-x)$
15. $(2a^2+1)(a^2-3)$
16. $(2x^2+5)(x^2+1)$
17. $(3x^2+a^2)(2x+a)(2x-a)$
18. $2(5a^2+2b^2)(a^2-10b^2)$
19. $2.b.b.(5a^2+2b)(a^2-5b)$
20. $(4x+3yz)(x-3yz)$
21. $(a+b+2)(2a+2b-1)$
22. $(3a+3b+4)(a+b-2)$
23. $(x+1)(ax-bx+a+b)$
24. $(x+1)(px+x-q-1)$
25. $(x+1)(a^2x+3x-4)$
26. $\{(x+y)^2z^2+(x-y)^2\}(z-1)(z+1)$
27. $(ax+ay+x-y)(ax+ay+y-x)$
28. $(1-3x)(1-6x)$

29. $(2a-b)(a-b+1)$
30. $(2x-y+10)(2x-y-3)$
31. $(x-1)(abx-acx-ac+bc)$
32. $(ax-x-a-1)(a^2x+ax+x+a^2-a+1)$

প্রশ্নমালা 11

1. $(x+y+1)(x+2y-1)$
2. $(a-b-1)(3a+3b+2)$
3. $(a+4b+5)(a-2b-1)$
4. $(a-b)(a+3b-2c)$
5. $(x^2+3x+1)(x+1)(x+1)$
6. $(x-1)(x-1)(5x^2+2x+5)$
7. $(x-2)(x+1)(x+1)$
8. $(x+2)(x-1)(x-1)$
9. $(x-2)(x^2+2x-7)$
10. $(x+2)(x+3)(x+4)$
11. $(a-1)(a^2-a-4)$
12. $(x-1)(x+1)(x+2)$
13. $(p-x)(p+x)(p+4x)$
14. $(x-1)(x+2)(x^2-2x+4)$
15. $(a-b-2c)(2a-b+c)$

প্রশ্নমালা 12 (A)

1. $(2a+b+c)(4a^2+b^2+c^2-2ab-bc-2ca)$
2. $(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx)$
3. $(2a-b+3c)(4a^2+b^2+9c^2+2ab+3bc-6ca)$
4. $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$
5. $(a-3x-1)(a^2+9x^2+3ax-3x+a+1)$
6. $(3x-2y-4)(9x^2+4y^2+16+6xy-8y+12x)$
7. $(a-1)(a-1)(a^2+a+1)(a^2+a+1)$
8. $(x^2+3x+1)(x^4-3x^3+8x^2-3x+1)$
9. $(x^2-2x-1)(x^4+2x^3+5x^2-2x+1)$
10. $(a+1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2-a+1)$
11. $3(b-c)(c-a)(a-b)$
12. $3(x-y)(y-z)(z-x)(x+y)(y+z)(z+x)$
13. $3(y+2z+x)(z+2x+y)(x+2y+z)$
14. $3(x+2y)(2y-3z)(x-3z)$
15. $-3(x-y)(y+z)(x-z)$
16. $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
17. $-(b-c)(c-a)(a-b)$
18. $(a+b+c)(bc+ca+ab)$

প্রশ্নমালা 13

1. $3(a-2b)$	2. $x+3$	3. $x+4$
4. $3x+5y$	5. $(x-1)(2x-3)$	6. $x-3$
7. $3x+1$	8. $x-2$	9. $x+2$
10. x^2+1	11. $4(x-3)$	12. $x+1$
13. $(x+1)(x+2)$	14. $x+5$	15. $3x-5$
16. $x-1$	17. $(x+3)(2x+1)$	18. $(x+1)^2$
19. $x-1$	20. x^2-3x+2	21. x^2+5x+1
22. x^2-2x+1	23. $x(2x^2+x+1)$	24. $(3x+1)$
25. x^2-2x+1	26. $x-1$	27. x^2-2x-1
28. $a-1$	29. x^2-x+1	31. 7 ; $(x-3)$ অথবা $(x-2)$

প্রশ্নমালা 14

1. $(x-a)(x+c)(x-c)$
2. $(x^2-1)(x^2-4)$
3. $(a^2-9b^2)(a+2b)(a+4b)$
4. $(1-a)^2(1+a)$
5. $(2x-1)(3x+1)(x+2)$
6. $(x+2)(x-3)(x+4)$
7. $(x-1)(x-2)(x-3)$
8. $(x+1)(x-1)(2x+1)$
9. $(a^6-1(a^2+1)$
10. $(3x+2)(3x-2)(x+1)$
11. $(x-2)(x-5)(2x+3)$
12. $12ab(a-2b)(a+2b)(a+b)$
13. $(8a^3-27b^3)(3a^2-ab-2b^2)$
14. $x(3x+1)^2(29x-7)(9x^2-3x+1)$
15. $(a+1)(a-1)^2(a-2)(a^2+1)$
16. $12(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$
17. $6x(x+1)(x-3)(x-4)$
18. $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)^2$
19. $60(x^6-y^6)$
20. x^6-a^6
21. $(3x+2)(64x^6-729)$
22. $x(x-1)^2(x^2-4)(x+3)$
23. $(x^2-1)(x^2-4)$
24. $(x^2-1)(x^2+x-1)$
25. $(x-1)(x^2-2)(x^2+5x+6)$
26. $(x+1)(x-1)(x+2)(3x-2)$
27. $(x^2-1)(3x^2+1)(4x-1)$
28. $(x-1)^2(x+1)^2(x-2)(x+3)$
29. $36(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$
30. $2x^2-3x-5$
31. x^2+2x-3 ; x^2+x-6
32. $10x^2-33x+20$; $15x^2-32x+16$
33. $(5x^2+6x+1)(1-x)$; $(5x^2+6x+1)(2+2x-x^2)$

অথবা $(5x^2+6x+1)(x-1)$; $(5x^2+6x+1)(x^2-2x-2)$

প্রশ্নমালা 15

1. 0
2. 1
3. $-(a+b)$
4. $\frac{6a}{7}$
5. 7
6. $-(a+b+c)$
7. $ab+bc+ca$
8. $a+b+c$
9. $a+b$
10. 1
11. $\frac{2ab}{a+b}$
12. $\frac{ab}{2(a+b)}$
13. $2a$
14. $2\frac{1}{2}$
15. 3 (প্রশ্নে $2x+2$ এর-পরিবর্তে $3x+2$ হইবে।)
16. $\frac{ab}{a-2b}$
17. $\frac{a+b}{2}$
18. 7
19. $-1\frac{3}{5}$
20. 5.
21. 6
22. $2\frac{1}{5}$
23. 3
24. 6
25. 6
26. $4\frac{1}{2}$
27. 5
28. $-6\frac{1}{2}$
29. $-1\frac{1}{3}$
30. $5\frac{1}{2}$
31. $-2\frac{1}{2}$
32. $-3a$
33. $\frac{a+b+c}{3}$
34. $\frac{ab-cd}{a+b-c-d}$
35. $-5\frac{1}{2}$
36. $\frac{5}{8}$
37. $\frac{-2ab}{c}$.
38. 0
39. $-(a^2+b^2+c^2)$

প্রশ্নমালা 16

1. 1701 এবং 21
2. 34 এবং 20
3. 93
4. 34
5. 31 এবং 4
6. 123
7. $\frac{5}{7}$
8. 82
9. 1500 জন
10. 24 বৎসর
11. 40 বৎসর, 10 বৎসর, 8 বৎসর
12. তামা 80 ঘন ইঞ্চি এবং টিন 60 ঘন ইঞ্চি
13. 36 ফুট
14. 180 কি. মি.
15. 5 দিন
16. 8 দিন
17. 35 মা এবং 45 মা.
18. 12 ঘ. 30 মি.
19. 10 কি. মি./ঘ.
20. 150 মি.
21. 72টি
22. 1100টি
23. প্রতি মিটার 13 টাকা দরে
24. 125 টাকা
25. 60টি
26. 400 টাকা
27. 100 জন

28. 2448 জন 29. 100 জন 30. 7·50 টাকা

31. 3টা. $16\frac{4}{11}$ মি. এবং 3টা. $49\frac{1}{11}$ মি.

32. (i) 4টা. $5\frac{5}{11}$ মি. এবং 4টা. $38\frac{2}{11}$ মি. (ii) $10\frac{10}{143}$ মিনিট লাভ

33. 5টা. $32\frac{4}{13}$ মি. 34. 120 কি. মি. 35. 16 জন

36. 10 গ্যালন 37. রাত 3টা. $51\frac{3}{7}$ মিনিট

প্রশ্নমালা 17

1. $x=4, y=3$ 2. $x=1, y=3$ 3. $x=\frac{1}{5}, y=\frac{1}{3}$

4. $x=1, y=1$ 5. $x=7, y=2$ 6. $x=2, y=\frac{1}{2}$

7. $x=5, y=1$ 8. $x=16, y=4$

9. $x=\dfrac{b(6+a)}{6}, y=\dfrac{b(6-a)}{6}$. 10. $x=1, y=2$

11. $x=2, y=3$ 12. $x=9, y=7$ 13. $x=1, y=2$

14. $x=\dfrac{bc_1-b_1c}{ab_1-a_1b}, y=\dfrac{ca_1-c_1a}{ab_1-a_1b}$ 15. $x=2, y=3$

16. $x=1, y=2$ 17. $x=1, y=1$ 18. $x=\frac{1}{4}, y=-4$

19. $x=2, y=3$ 20. $x=6, y=10$ 21. $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{5}$

22. $x=3, y=11$ 23. $x=y=\dfrac{ab}{a+b}$ 24. $x=a, y=b$

25. $x=2, y=3$ 26. $x=2, y=\frac{2}{3}$ 27. $x=\frac{1}{2}, y=2$;

28. $x=2, y=1$ 29. $x=144, y=89$ 30. $x=2, y=3$

31. $x=2, y=-3$ 32. $x=3, y=1$ 33. $x=1\frac{1}{4}, y=1$

34. $x=\frac{5}{2}, y=\frac{1}{2}$

প্রশ্নমালা 18

1. 0 3. 2 6. $x=0, y=2, z=4$ 7. $x=1, y=2, z=5$

8. $x=2a, y=2b, z=2c$ 9. $x=y=z=1$

10. $x=-4, y=-6, z=10$ 11. $x=3, y=2, z=1$

12. $x=1, y=3, z=4$ 13. $x=3, y=2, z=1$

14. $x=6, y=5, z=4$ 15 $x=y=z=1$

16. $x=\dfrac{2abc}{ab+ac-bc}, y=\dfrac{2abc}{bc+ab-ac}, z=\dfrac{2abc}{ac+bc-ab}$

17. $x=1, y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{2}$.

18. $x=1, y=\frac{2}{3}, z=\frac{1}{2}$ 19. $x=b-c, y=c-a, z=a-b$.

প্রশ্নমালা 19

1. (a) কোট = 50 টা, সার্ট = 25 টা. 1. (b) 3 কি.মি.
2. $\frac{5}{9}$ 4. 24 5. $\frac{4}{15}$ 6. 20, 25, 30
7. 8, 14, 55 8. 253 9. 737
10. 37 বৎসর, 9 বৎসর, 6 বৎসর 11. 40 দিন, 60 দিন
12. 17 ফু., 13 ফু. 13. 20 মি., 4 মি. 14. 1545 টা. ; 810 টা.
16. 60 কিমি. 17. 45 মা./ঘ. 30 মা./ঘ.
18. 100 কি.মি., 25 কি. মি./ঘ. 19. 400 টা. ; 300 টা. 20. 6 টাকা
21. 10 কি.মি./ঘ., 5 কি. মি./ঘ.
22. 3 টা. $31\frac{67}{143}$ মি. ; 6 টা. $17\frac{89}{143}$ মি. 23. 70 পা., 200 পা.
24. 1175 টাকা 25. 8 কি. মি. 26. 57 টাকা
27. 180 টা. 28. 1630 টাকা

প্রশ্নমালা 20

7. $y=9$; $x=-8$ 8. 3 9. $-\frac{2}{5}$
10. অক্ষদ্বয় দ্বারা ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 একক এবং 3 একক
14. $x=2, y=1$; $x=11, y=6$ 16. 6 একক এবং 9 একক
17. 14 টাকা ; 10 কিলোমিটার 18. 90 টাকা ; 18 দিনে
19. 5 ইঞ্চি
21. 4 টায় ; 23 কি.মি. 22. (i) 50°F (ii) 50°C
23. (i) $x=-1$, (ii) $x=2$, (iii) $x=2$ এবং $y=3$
(iv) $x=1$ এবং $y=2$. 24. $x=5$ এবং $y=-5$; ছেদ বিন্দুতে উৎপন্ন কোণের পরিমাপ 90°.

পাটীগণিত

প্রশ্নমালা 1

1. 5 : 7 2. 3 : 20 3. 10 : 1 4. 3 : 4 5. 2 : 3
6. 3 : 5 7. 3 : 1 8. 36 : 55 9. 76 : 63 10. 27
11. ·0002 12. $3\frac{3}{4}$ 13. 25 14. $3\frac{3}{4}$ 15. ঠিক
16. ঠিক 17. ঠিক নয় 18. 25 19. $3\frac{3}{4}$ 20. 95
21. 1156·25 পা 22. 49 এবং 56 23. 15 ; 55 26. 192 টাকা
27. 10 : 9 28. 1 29. 2 30. 24 বৎসর
31. 52 বৎসর 32. 360 এবং 3[illegible]0 33. 42 34. 132 জন
35. 36 এবং 63 36. 6, 15, 18, 21 বা −6, −15, −18, −21
37. 5 লিটার 38. 21 39. 5 : 12 40. 4 : 11

প্রশ্নমালা 2

1. 209 জন। 2. 2400 টাকা ; 4800 টাকা ; 3200 টাকা।
3. A 6868 টা. ; B 5151 টা. ; C 3434 টা.।
4. 180 টাকা। 5. 106 বৎসর। 6. 72 ; 96 ; 120
7. 6 : 7 : 8 8. A 162 রান, B 108 রান এবং C 72 রান।
9. 3500 টাকা ; 2100 টাকা ; 1500 টাকা। 10. 63 ; 105 ; 165
11. P পায় 348 টাকা Q পায় 290 টাকা এবং R পায় 232 টাকা।
12 9450 টাকা। 13. 1133·8 গ্রাম (প্রায়)।
14. পুরুষ 83·25 টাকা ; স্ত্রী 47·60 টাকা ; বালক 41·65 টাকা।
15. 1000 টাকা। 16. A 375 টাকা ; B 150 টাকা ; C 225 টাকা।
17. সঞ্জীব 1500 টাকা ; অমল 1000 টাকা এবং শিবু 500 টাকা।
18. A 288 টাকা ; B 270 টাকা ; C 216 টাকা ; D 126 টাকা।
19. 1500 টাকা 20. A 102 টাকা, B 104 টাকা এবং C 78 টাকা
21. A 240 টাকা, B 360 টাকা, এবং C 900 টাকা 22. 736 টাকা
23. A 7 টাকা, B 6 টাকা, এবং C 4·50 টাকা 24. 256·66 টাকা
25. 3000 টাকা, 384 টাকা 26. A 230 টাকা, B 300 টাকা
27. B 3955 টাকা এবং C 6780 টাকা 28. 4600 টাকা

প্রশ্নমালা 3

1. 358·40 টাকা 2. 37·2 কি. মি. 3. 4993·75 টাকা 4. 15 দিন
5. $35\frac{5}{14}$ মিটার 6. 1430 জন 7. 11 দিন 8. 34 দিন
9. 390 টাকা 10. 270 জন 11. 760 টাকা 50 পয়সা
12. 66 দিন 13. $30\frac{5}{8}$ দিনে 14. 133 টাকা 33 পয়সা (প্রায়)
15. 125 টাকা 16. 1225·5 গ্রাম 17. $59\frac{6}{11}$ গজ
18. 18টি কামান

প্রশ্নমালা 4

1. 2টা. 95 প. 2. 265 টাকা 3. সোরা $20\frac{5}{6}$ কি.গ্রা., গন্ধক $1\frac{2}{3}$ কি.গ্রা., কাঠ কয়লা $2\frac{1}{2}$ কি.গ্রা. 4. 2 : 3 5. 1 : 2 6. 3 : 5
7. 2 টাকা 31 পয়সা 8. 12 কিলো এবং 10 কিলো 9. 12 লিটার
10. $\frac{1}{3}$ অংশ 11. 9 : 11 12. 401 : 544
13. 3 : 1, 210 টা 14. 15 গ্যালন, 21 : 10 15. 750 গ্যালন, $37\frac{1}{2}$ গ্যালন

প্রশ্নমালা 5

1. (a) 40% (b) $12\frac{1}{2}$% (c) $33\frac{1}{3}$% 2. (a) $\frac{1}{20}$; (b) $\frac{1}{16}$; (c) $\frac{3}{40}$; (d) $\frac{1}{12}$ 3. 1 টা. 87 প. 4. 26 কি.গ্রা. 250 গ্রা.
5. 12800 টা. 6. 960 টা. 7. 600 জন 8. 75·86%
9. 700 জন 10. 10,000 টা. ; 2,500 টা.; 3,000 টা.
11. 7,500 জন ও 12,500 জন 12. $39\frac{13}{33}$%
13. প্রতিকিলো 4 টা. এবং 5 টা. 14. 20% 15. $12\frac{1}{2}$% কমিল
16. 600 17. 350 টা. 18. 844·56 টা. 19. 73 টা. 94 প.
20. 160 কেজি 21. $4\frac{13}{15}$% 22. 63% 23. 23% 24. 8% 25. 17%
26. 240 টা. 27. 2,00,000 টা. 28. 10,000 টা.
29. 500 টা., $12\frac{1}{2}$% 30. 60 কি. গ্রা. 31. $10\frac{1}{12}$% 32. $6\frac{2}{3}$%
33. 10,000 টা. 34 2,000 টা.

পরিশিষ্ট

বীজগণিত এবং পাটীগণিতের সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলী :

বিভাগ—ক

1. a, b এবং c পূর্ণসংখ্যা হইলে নিম্নলিখিত বক্তব্যগুলির মধ্যে যে সকল বক্তব্য-গুলিকে সঠিক বলিয়া মনে কর তাহাদের পার্শ্বে (√) চিহ্ন দাও :—

(i) $a+b=b+a$ (ii) $a-b=b-a$ (iii) $ab=ba$

(iv) $a(b+c)=b(a+c)$ (v) $a+(b+c)=b+(a+c)$

(vi) $a-(b-c)=(a-b)-c$ (vii) $a-(b+c)=(a-b)+c$

(viii) $a(b\times c)=ab\times ac$ (ix) $a(b+c)=ab+c$

(x) $a(b\div c)=ab\div ac$ (xi) $a\div b\times c=\frac{a}{b}\times\frac{a}{c}$

(xii) $a+b=a+c$ হইলে $b=c$ (xiii) $ab=ac$ হইলে $b=c$

(xiv) $b=c$ হইলে $ab=ac$ (xv) $a+b=0$ হইলে $a=0$ এবং $b=0$

(xvi) $a+b=0$ হইলে হয় $a=0$ অথবা $b=0$

(xvii) $a+b=0$ এবং a ও b ঋণাত্মক না লইলে $a=0$ এবং $b=0$

(xviii) $ab=0$ হইলে $a=0$ এবং $b=0$

(xix) $ab=0$ হইলে হয় $a=0$ অথবা $b=0$

(xx) $ab=0$ কিন্তু $a\neq 0$ এবং $b\neq 0$

(xxi) $\frac{a}{b}=0$ হইলে $a\neq 0$ এবং $b=0$

(xxii) $\frac{a}{b}=0$ হইলে $a\neq 0$ এবং $b\neq 0$

(xxiii) $\frac{a}{b}=0$ হইলে $a=0$ এবং $b\neq 0$

(xxiv) $a\times 0=0\times a=a$

(xxv) $(a-b)^2=0$ হইলে $a=b$

(xxvi) $a^2=b^2$ হইলে $a+b\neq 0$

(xxvii) $c^2=b^2$ হইলে $b-c=0$

2. (i) x-এর মান কত হইলে a^2-8a+x রাশিটি পূর্ণবর্গ হইবে ?

(ii) $a^3+b^3=(a+b)^3-3abx$ হইলে x-এর মান কত ?

(iii) $a^3-b^3=(a-b)(a^2-x+b^2)$ হইলে a-এর মান কত ?

(vi) $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-p$ হইলে p-এর মান কত ?

(v) $500^2-499^2=y$ হইলে y-এর মান কত ?

(vi) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+e^2+2ab+2ac-2by$ হইলে y-এর মান কত ?

(vii) $(2+1)(2-1)(2^2+1)(2^4+1)=p$ হইলে p-এর মান কত ?

(viii) $27x^3+1=(3x+1)(p-3x+1)$ হইলে p-এর মান কত ?

(ix) $x=\frac{1}{3}a-1$ এবং $y=\frac{1}{4}a+1$ হইলে $(3x-4y+7)$-এর মান কত ?

3. a-একটি পূর্ণসংখ্যা হইলে নিম্নলিখিত বক্তব্যগুলির মধ্যে যেগুলি সঠিক নয় তাহাদের পার্শ্বে (×) চিহ্ন দাও :—

(i) $(a-1)^2=a^2-1$

(ii) $(a+1)^2=a^2+2a+1$

(iii) $(a-2)^2=a^2-4a+4$

(iv) $(a^3-1)^3=a^3+1$

(v) $(a-1)^3=a^3-3a+3a^2-1$

(vi) $a^3-1=(a-1)-3a.1$

(vii) $a^3+1=(a+1)^3-3a(a+1)$

(viii) $a=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$

(ix) $\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=a^2-4$

(x) $a+\frac{1}{a}=1$ হইলে $a^2+\frac{1}{a^2}=-1$

4. সঠিক উত্তরের নীচে দাগ দাও :—

(a) $x+\frac{1}{x}=4$ এবং $x-\frac{1}{x}=-2$ হইলে $x^2-\frac{1}{x^2}=-2, 4, -8, 16$

(b) $x-\frac{1}{x}=a$ হইলে $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2+2, a^2-2, a^2$

(c) $x-\frac{1}{x}=2$ হইলে $x^2-\frac{1}{x^2}=2, 8, 14$

(d) $p+\frac{1}{p}=-1$ হইলে $p^3+\frac{1}{p^3}=2, -4, -6$

(e) $x+1$ এবং x^3+x^2+x+1 রাশিদ্বয়ের উৎপাদক $x+1, x^2+1, x^2-1$

(f) (x^2-y^2), (x^3-y^3) এবং $(xy-y^3)$-এর উৎপাদক xy, $(x-y)$, x^2-y^2.

4 (A). (i) xyz রাশিটি $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)+3xyz$-এর উৎপাদক হইবে কি ? যুক্তি দাও।

(ii) $a^2b^2(a-b)$ রাশিটি $ab^2(a-b)$ এবং $a^2b(b-a)$-এর ল. সা. গু. হইবে কি ? যুক্তি দাও।

(iii) $(a+b+c)$ রাশিটি কি $(b+c)^2-a^2$ এবং $(a+b)^2-c^2$-এর গ. সা. গু. হইবে ? যুক্তি দাও।

5. নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও :—

(i) $(p-q)$ রাশিটি $x(p-q)-p-q$ রাশিটির উৎপাদক হইবে কি ?

(ii) $(b-1)$ রাশিটি $x-a+b(a-x)$ রাশিটির উৎপাদক হইবে কি ?

(iii) $ad+bc-ac-bd$ রাশির একটি উৎপাদক $(a-b)$, উহার অপর উৎপাদকটি কত ?

(iv) $6+11x-10x^2$ রাশিটির একটি উৎপাদক $(2x-3)$, অপর উৎপাদকটি কত ?

(v) $(2x-1)$, $2x^2+5x-p$-এর একটি উৎপাদক হইলে p-এর মান কত ?

6. (i) সমীকরণ ও অভেদ কাহাকে বলে ? প্রতিক্ষেত্রে উদাহরণ দাও।

6, (ii) নিম্নের সমীকরণগুলির মধ্যে কোনগুলি xএর সরল সমীকরণ তাহা নির্ণয় কর।

(a) $(x+2)^2=x^2$ (b) $2xy+5=7$

(c) $(x+1)(x-1)=3x^2+x$ (d) $x^2+x=6$

(e) $\frac{x-1}{4}-\frac{x-2}{3}=0$ (f) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3x+2}=0$

(g) $\frac{x}{2}+x=\frac{2}{x}+2$ (h) $ax-b=0$ ($a\neq 0$ এবং a, b দুইটি বাস্তব রাশি)

7. (a) একটি জামার দাম x টাকা হইলে $6x$ টাকায় কয়টি জামা পাওয়া যাইবে ?

(b) একটি দুই অঙ্কের সংখ্যার এককের স্থানের অঙ্কটি p এবং দশকের স্থানের অঙ্কটি q হইলে সংখ্যাটি কত ?

(c) একটি ক্লাবের বয়স্ক সদস্যের প্রত্যেকে 2 টাকা এবং বালকেরা প্রত্যেকে 1 টাকা করিয়া চাঁদা দেওয়াতে 120 টাকা চাঁদা উঠিল। যদি বালকের সংখ্যা বয়স্কদের সংখ্যার অর্ধেক হয় তবে ক্লাবের মোট সদস্য সংখ্যা কত ?

(d) রামের বর্তমান বয়স x বৎসর। শ্যাম, রাম অপেক্ষা 5 বৎসরের ছোট। 15 বৎসর পরে শ্যামের বয়স কত হইবে ?

(e) দুইটি সংখ্যার যোগফল 27 ; একটি অপরটির দ্বিগুণ হইলে সংখ্যাদুইটির বর্গের অন্তর কত ?

(f) দুইটি কলমের দাম 25 টাকা। যদি একটির দাম অপরটির দ্বিগুণ অপেক্ষা 2 টাকা কম হয় তবে কোন্‌টির দাম কত ?

(g) প্রতি কিলোগ্রাম চায়ের দাম x টাকা। যদি চায়ের দাম $12\frac{1}{2}\%$ কমিয়া যায় তবে এক কুইণ্টাল চায়ের দাম কত হইবে?

(h) দুই সংখ্যার বিয়োগফল $x-15$, ক্ষুদ্রতরটি $y+2$ হইলে বৃহত্তরটি কত?

(i) তিনটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যার যোগফল 93 হইলে সংখ্যা তিনটি কি কি হইবে?

(j) দুইটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার বর্গের অন্তর 76; সংখ্যা দুইটির বর্গের সমষ্টি কত?

(k) কোন বিদ্যালয়ের পঞ্চম ও নবম শ্রেণীর মোট ছাত্র সংখ্যা 200 জন। সাধারণ প্রজাতন্ত্র দিবস উপলক্ষে পঞ্চম শ্রেণীর প্রত্যেক ছাত্রকে 2টি এবং নবম শ্রেণীর প্রত্যেক ছাত্রকে 3টি করিয়া কমলালেবু দেওয়াতে ঐ দুই শ্রেণীর জন্য 480টি কমলালেবু লাগিল। নবম শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা কত?

8. (a) $4x-3y-7=0$ এবং $3x+y-2=0$ সমীকরণদ্বয় (i) সহ-সমীকরণ (ii) সহ-সমীকরণ নয় (iii) অসঙ্গত সমীকরণ।

সঠিক উত্তরটির নীচে দাগ দাও। যুক্তি দেখাও।

(b) নিম্নলিখিত সমীকরণ যুগলসমূহের মধ্যে যে-গুলি অসঙ্গত সমীকরণ এবং যে সমীকরণ যুগলসমূহ পরস্পর নির্ভরশীল তাহাদের পার্শ্বে (×) চিহ্ন দাও:—

(i) $2x+y=7$
$4x-2y=2$

(ii) $2x+3y=7$
$4x+6y=14$

(iii) $ax+ay=9a$
$2x+2y=18$

(iv) $7x-3y=31$
$9x-5y=41$

(v) $acx+by=c$
$a^2x+cy=a+1$

(vi) $4x+y=11$
$4x+y=9$

(c) n-এর কোন্ মানের জন্য $x-ny=n$ এবং $x+(n-2)y=2$ সহ-সমীকরণ-দ্বয়ের কোন সমাধান থাকিতে পারে না? যুক্তি দাও।

9. (a). যদি $x=2r$ এবং $y=\frac{r}{3}-1$ হয় তবে r-এর মান কত হইলে $x=2y$ হইবে?

(b) (i) $\frac{2x}{y}=\frac{p}{xy}=\frac{q}{y^2}$ হইলে p এবং q-এর মান কত?

(ii) $\frac{x-y}{x+y}=\frac{(x-y)^2}{n}=\frac{m}{x^2-y^2}$ হইলে m এবং n-এর মান কত?

(iii) এক ব্যক্তি x টাকা দিয়া একটি প্যাণ্ট এবং y টাকা দিয়া একটি জামা ক্রয় করিলেন। ইহার এক মাস পরে প্যাণ্ট এবং জামার দাম 10% কমিয়া গেল। এই সময়ে ক্রয় করিলে তাহার জামা এবং প্যাণ্টের মোট দাম কত হইত?

10. শূন্য স্থান পূর্ণ কর :—(i) $2x+y=5$ সমীকরণটির কতগুলি সমাধান আছে ? সমীকরণটির সাপেক্ষে নিম্নের শূন্যস্থানগুলি পূর্ণ কর :

x	5	—	−2	—
y	—	2	—	7

(ii) $x=0$ সমীকরণটির লেখচিত্রটি—এবং $y=0$ সমীকরণের লেখচিত্রটি—হইবে।

(iii) $x=5$ সমীকরণটির লেখচিত্রটি—অক্ষের সমান্তরাল।

(iv) $y=-9$ সমীকরণটির লেখচিত্রটি—অক্ষের উপর লম্ব হইবে।

(v) $y+2=0$ সমীকরণটির লেখচিত্রটি—অক্ষের সমান্তরাল।

(vi) $y=2x+1$ সমীকরণটির লেখচিত্রটি একটি—হইবে।

(vii) $2x=3y$ সমীকরণটির লেখচিত্রটি অক্ষদ্বয়ের—বিন্দু দিয়া গমন করে।

(viiii) দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. x এবং ল. সা. গু. y ; উহার একটি সংখ্যা p হইলে অপর সংখ্যাটি—হইবে।

11. 100 ও 1000-এর অন্তর্বর্তী কোনও পূর্ণ সংখ্যার অঙ্কগুলির যোগফল যদি সেই সংখ্যা হইতে বিয়োগ করা হয় তবে বিয়োগফল সর্বদাই :—

(a) 3 দ্বারা বিভাজ্য হইবে। (b) 5 দ্বারা বিভাজ্য হইবে। (c) 6 দ্বারা বিভাজ্য হইবে। (d) 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

উপরোক্ত অংশগুলির মধ্যে যেগুলি শুদ্ধ সেইগুলিকে (√) এই চিহ্ন দ্বারা নির্দেশ কর এবং তাহার স্বপক্ষে যুক্তি দেখাও। [S. E. '76]

12. নিম্নের ছকটি হইতে $3x+4y-12=0$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে এরূপ স্থানাঙ্কগুলি বাহির কর :

x	0	2	1·5	2	−3	4
y	3	1	2	1·5	5·2	0

বিভাগ—খ

1. (a) নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলিকে মানের উর্দ্ধক্রমানুসারে সাজাও :—

(i) $\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{15}{16}, \frac{21}{25}$ (ii) $0·2, \frac{3}{5}, \frac{2}{9}, \frac{12}{13}$

(b) নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলিকে মানের অধঃক্রমানুসারে সাজাও :—

(i) $\frac{3}{2}, 1·02, \frac{13}{12}, \frac{8}{7}$ (ii) $\frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{9}{11}, 0·72$

(c) নিম্নের বক্তব্যগুলির মধ্যে যেগুলিকে সঠিক বলিয়া মনে কর তাহাদের পার্শ্বে (√) চিহ্ন দাও :—

(i) $5>7$ (ii) $-5>-7$ (iii) $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$

(iv $\frac{5}{6}>\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$ (v) $\frac{3}{5}<\frac{7}{10}<\frac{11}{30}$

(vi) $\frac{11}{30}<\frac{3}{5}<\frac{7}{10}$ (vii) $-1>1$ (viii) $(-1)^2>1$ (ix) $(-1)^{-2}=1$,

(x) $-1<\left(-\frac{1}{2}\right)$

(d) বন্ধনী ব্যবহার করিয়া সমান চিহ্নের উভয় পার্শ্বস্থ রাশিদুইটির মধ্যে সমতা আনায়ন কর :—

(i) $5-4\times2+3=5$ (ii) $-12+9+6\div5\times4=0$

(e) একটি বাক্সে তিনটিরঙের মোট 310টি মার্বেল আছে। নীল ও লাল মার্বেলের সংখ্যা 221 এবং লাল ও হলুদ মার্বেলের সংখ্যা 230 হইলে প্রত্যেক প্রকার মার্বেলের সংখ্যা কত ছিল ?

(f) একটি ক্রিকেট খেলায় A, B এবং C মোট 173 রাণ করিল। A এবং B মোট 123 রাণ এবং A, C অপেক্ষা 13 রাণ বেশি করিয়াছিল। B, কত রাণ করিয়াছিল ?

(g) শূন্যস্থান পূর্ণ কর :—

(i) দুইটি জোড় সংখ্যার যোগফল সর্বদা — হইবে।

(ii) দুইটি বিজোড় সংখ্যার বিয়োগফল সর্বদা — হইবে।

(h) নিম্নের বক্তব্যগুলি সঠিক কিনা বল :—

(i) দুইটি বিজোড়সংখ্যার যোগফল সর্বদা জোড় হইবে।

(ii) দুইটি পূর্ণবর্গ সংখ্যার যোগফল সর্বদা পূর্ণবর্গ হইবে।

(iii) n যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা হইলে $(2n-1)$ এবং $(2n+1)$ সংখ্যাদ্বয় ক্রমিক বিজোড় সংখ্যা হইবে।

(iv) n যে-কোন অখণ্ড সংখ্যা হইলে $2n$ এবং $(2n+2)$ সংখ্যাদ্বয় সর্বদা দুইটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যাকে সূচিত করে।

(v) n যে কোন ধণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে $n(n+1)$ সর্বদা 2 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

2. (i) একটি খাতা এবং একখানা বইয়ের দামের অনুপাত 2 : 5 ; যদি বইটির দাম 2·50 হয় তবে খাতাটির দাম কত ?

(ii) $2 : 3 :: 6 : x$ হইলে x-এর মান কত ?

(iii) দুইটি ফুটবলের দাম 72 টাকা। যদি উহাদের দামের অনুপাত 5 : 3 হয় তবে প্রত্যেকটির দাম কত ?

(iv) 8 এবং 18-এর মধ্যসমানুপাতী p হইলে p-এর মান কত ?

(v) দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 ; উহাদের যোগফল 91 হইলে, বিয়োগফল কত হইবে ?

(vi) দুইটি বস্তুর ভরের অনুপাত $x : y$; উহাদের একটি ভর 40 কি. গ্রা. হইলে অপরটির ভর কত ?

(vii) একটি দ্রবণে দ্রাব্য এবং দ্রাবকের অনুপাত 3 : 7 ; উক্ত দ্রবণে 21 গ্রাম দ্রাব্য দ্রবীভূত থাকিলে দ্রবণের পরিমাণ কত ?

(viii) একখানা ফটোগ্রাফের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের অনুপাত 3 : 2 ; যদি উহার দৈর্ঘ্যকে 12 সে. মি. হইতে বর্ধিত করিয়া 21 সে. মি. করা হয়, তবে প্রস্থ কত বৃদ্ধি পাইবে ?

(ix) ভারতবর্ষের একখানি মানচিত্র এবং ভারতবর্ষের প্রকৃত দৈর্ঘ্যের অনুপাত 1 : 32,000 ; যদি মানচিত্রটিতে A এবং B স্থান দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 3 সে. মি. হয়, তবে A হইতে B-এর প্রকৃত দূরত্ব কত ?

3. (i) একটি ঘড়ির ক্রয় মূল্য 60 টাকা। উহা 5% লাভে বিক্রয় করিলে বিক্রয় মূল্য কত হইবে ?

(ii) একটি টেবিলের বিক্রয় মূল্য 115 টাকা। যদি উহার ক্রয়মূল্য 100 টাকা হয় তবে টেবিলটি বিক্রয়ে শতকরা কত লাভ হইবে ?

(iii) একজন ব্যবসায়ী 10% ছাড় দিয়া জিনিস বিক্রয় করে। যদি ঐ দোকানের একটি জিনিসের ধার্য মূল্য 32 টাকা হয় তবে জিনিসটি কিনিতে ক্রেতাকে কত দিতে হইবে ?

(iv) যদি কোন ব্যক্তির মাসিক বেতন $6\frac{1}{4}\%$ বাড়িয়া যাওয়ায় তাহার মাসিক বেতন 425 টাকা হয় তবে তাহার পূর্বের মাসিক বেতন কত ছিল ?

(v) কোন কোম্পানী তাহার প্রত্যেক কর্মীকে তাহাদের নিজ নিজ বার্ষিক বেতনের উপর 6% বোনাস দিলেন। যদি একজন কর্মী 360 টাকা বোনাস পাইয়া থাকেন তবে তাহার মাসিক বেতন কত ?

(iv) একজন এজেন্ট বিক্রয় মূল্যের উপর $12\frac{1}{2}\%$ কমিশন পাইয়া থাকেন। যদি তিনি 12,500 টাকা কমিশন হিসাবে আয় করিয়া থাকেন তবে তিনি কত টাকার দ্রব্য বিক্রয় করিয়া ছিলেন ?

(vii) x টাকার 15% = y টাকার 10% হইলে $\frac{x}{y}$-এর মান কত ?

(viii) কোন বিদ্যালয়ে 510 জন ছাত্র ছিল। কয়েকজন ছাত্র ভর্তি হওয়ায় বিদ্যালয়ের ছাত্রসংখ্যা 544 জন হইল। ইহাতে ছাত্রসংখ্যা শতকরা কত বৃদ্ধি পাইল ?

(ix) একটি গ্যাসীয় মিশ্রণে 20% হাইড্রোজেন, 50% অক্সিজেন এবং বাকী নাইট্রোজেন আছে। মিশ্রণটির আয়তন 160 ঘনসেন্টিমিটার হইলে উহাতে নাইট্রোজেনের আয়তন কত ?

(x) একটি মিশ্রণে A, B এবং C-এর অনুপাত 1 : 2 : 7 হইলে মিশ্রণটিতে A, B এবং C এর শতকরা ভাগ কত ?

(xi) কোন বিদ্যালয়ের নবম ও দশম শ্রেণীতে মোট 160 জন ছাত্র আছে। তাহাদের মধ্যে 110 জন ফুটবল এবং 55 জন ক্রিকেট খেলাতে অংশ গ্রহণ করে। 11 জন ছাত্র কোন প্রকার খেলায় অংশ গ্রহণ করে না। শতকরা কতজন ছাত্র উভয় খেলায় অংশ গ্রহণ করে ?

(xii) একজন ছাত্র ইংরাজী, অঙ্ক এবং বিজ্ঞান যথাক্রমে 63%, 75% এবং 84% মার্ক পাইয়াছে। ছাত্রটি গড়ে শতকরা কত মার্ক পাইয়াছে ?

4. (i) নিম্নে প্রদত্ত রাশিগুলির মধ্যে যে দুইটি সমান তাহাদের নীচে দাগ দাও :—

20 এর 5%, 20 এর $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{4} \div 0{\cdot}75$ [S. E. '76 (Com)]

(ii) 2 : 5, 6 : 11 এবং 11 : 14 অনুপাত তিনটির মধ্যে ক্ষুদ্রতম অনুপাতটি : (a) 2 : 5 (b) 6 : 11 (c) 11 : 14.

সঠিক উত্তরটির নীচে দাগ দাও।

(iii) কোন ব্যবসায়ে A-এর 3000 টাকা 8 মাস এবং B-এর 4000 টাকা 6 মাসের জন্য খাটিল। নিম্নের সিদ্ধান্ত তিনটির মধ্যে কোন্‌টি সত্য বল :—

(a) A এবং B-এর লভ্যাংশ সমান (b) B-এর লভ্যাংশ A-এর লভ্যাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর (c) A-এর লভ্যাংশ B-এর লভ্যাংশ হইতে বেশী।

(iv) 500 সি. সি. জলে কত আয়তনের অম্ল মিশ্রিত করিলে মিশ্রণটিতে জল ও অম্লের অনুপাত 3 : 5 হইবে ?

উঃ ________

(v) একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্যকে 25% বৃদ্ধি এবং প্রস্থ 12% হ্রাস করিলে ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধি বা হ্রাস কত হইবে ?

উঃ ________

উত্তরমালা

বিভাগ-ক

1. (i) ✓ (iii) ✓ (v) ✓ (xii) ✓ (xiv) ✓ (xvii) ✓ (xxiii) ✓ (xxv) ✓.

2. (i) 16 (ii) $(a+b)$ (iii) $-ab$ (iv) $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ (v) 999 (vi) $-c$ (vii) 255 (viii) $9x^2$. (ix) 0

3. (i) × (iv) × (v) × (vi) × (ix) ×.

4. (a) -8 (b) a^2+2 (c) 14 (d) 2 (e) $(x+1)$ (f) $(x-y)$.

4(A) (i) না (ii) হ্যাঁ (iii) হ্যাঁ

5. (i) না (ii) হ্যাঁ (iii) $(d-c)$ (iv) $-(5x+2)$ (v) 3.

6. (ii) (a) ; (e) ; (f) ; (h).

7. (a) 6টি (b) $10q+p$ (c) 72 জন (d) $(x+10)$ বৎসর (e) 243 অথবা -243 (f) 9 টাকা, 16 টাকা (g) $87\frac{1}{2}x$ টাকা (h) $x+y-13$ (i) 29, 31, 33. (j) 724 (k) 80

8. (a) (i) 8. (b) (ii) নির্ভরশীল সমীকরণ (iii) নির্ভরশীল সমীকরণ (vi) অসঙ্গত সমীকরণ। 8. (c) $n=1$

9. (a) $r=-1\frac{1}{2}$ (b) (i) $p=2x^2$ এবং $q=2xy^2$ (ii) $n=x^2-y^2$ এবং $m=\frac{(x-y)^2}{x+y}$ (iii) $\frac{9}{10}(x+y)$ টাকা।

10. (i) অসংখ্য ; -5, $-1\frac{1}{2}$, 9, -1 (ii) y – অক্ষ, x – অক্ষ (iii) y (iv) y (v) x (vi) সরলরেখা (vii) মূলবিন্দু (viii) $\frac{xy}{p}$.

11. (a), (d) ; যুক্তি : মনে কর, একক, দশক এবং শতকের স্থানের অঙ্ক তিনটি যথাক্রমে z, y এবং x. ∴ সংখ্যাটি$=100x+10y+z$;

এখানে $(100x+10y+z)-(x+y+z)=99x+9y=9(11x+y)$.

12. (0,3), (2,1·5), (4,0).

বিভাগ-খ

1. (a) (i) $\frac{3}{4}, \frac{21}{25}, \frac{6}{7}, \frac{15}{16}$ (ii) 0·2, $\frac{2}{9}, \frac{3}{5}, \frac{12}{13}$

(b) (i) $\frac{3}{2}, \frac{8}{7}, \frac{13}{12}$, 1·02 (iii) $\frac{11}{12}, \frac{5}{6}, \frac{9}{11}$, 0·72

(c) (ii) ✓ (iii) ✓ (iv) ✓ (vi) ✓ (ix) ✓ (x) ✓

(d) (i) $(5-4)\times2+3=5$ (ii) $-12+(9+6)\div5\times4=0$

(e) 80টি নীল, 141টি লাল এবং 89টি হলুদ।

(f) B, 60 রাণ করিয়াছিল।

(g) (i) জোড় (ii) জোড় (h) (i) সঠিক (ii) সঠিক নয় (iii) সঠিক (iv) সঠিক নয় (v) সঠিক।

2\. (i) 1 টাকা (ii) 9 (iii) 45 টাকা ও 27 টাকা (iv) 12 (v) 13 অথবা -13 (vi) $\frac{40x}{y}$ কি. গ্রা. অথবা $\frac{40y}{x}$ কি. গ্রা. (vii) 70 গ্রাম (viii) 6 সে. মি. (ix) 960 মিটার

3\. (i) 63 টাকা (ii) 15 টাকা (iii) 28 টাকা 80 পয়সা (iv) 400 টাকা (v) 500 টাকা (vi) 1,00000 টাকা (vii) $\frac{2}{3}$ (viii) $6\frac{2}{3}$ জন (ix) 48 ঘন সে. মি. (x) A, B ও C যথাক্রমে 10%, 20% এবং 70% (xi) 10 জন (xii) 74%

4\. (i) 20 এর 5% এবং $\frac{3}{4} \div 0{\cdot}75$ (ii) 2 : 5 (iii) (a) (iv) $833\frac{1}{3}$ সি. সি. (v) $\frac{1}{10}$ অংশ বৃদ্ধি।
